UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1986/87

MAT114 - Algebra Linear

Tarikh: 24 Jun 1987 Masa: 2.15 petang - 5.15 petang
(3 jam)

---

Jawab SEMUA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Sistem persamaan linear $Ax = b$ telah diperturunkan kepada sistem persamaan linear $Cx = \theta$ dengan menggunakan beberapa operasi baris permulaan yang berturutan di mana

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$Ax = b$
$\Downarrow$
$Cx = \theta$

(a) (i) Perturunkan matriks A ke bentuk eselon.

(ii) Nyatakan penyelesaian sistem persamaan linear
$$Ax = b.$$

(iii) Apakah pangkat matriks A?

*(40/100)*

(b) Andaikan operasi-operasi baris permulaan berikut telah digunakan.

$$A \xrightarrow{R_2(\frac{1}{4})} A_1 \xrightarrow{R_4^1} A_2 \xrightarrow{R_4^3(-1)} C$$

(i) Apakah b?

(ii) Nilaikan det(C).

(iii) Apakah hubungan di antara det(A) dengan det($A_2$) dan di antara det(C) dengan det($A_1$)?

(iv) Berdasarkan keputusan yang anda perolehi di bahagian (ii) dan (iii), nyatakan nilai $\det(A^{-1})$.

*(60/100)*

2. (a) Andaikan $A = [a_{ij}]$ merupakan matriks $(2 \times 2)$ dan simetri. Andaikan $x^T Ax > 0$ bagi setiap $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq \theta$.

(i) Buktikan bahawa $a_{11} > 0$ dan $\det A > 0$.

(ii) Jika $\det(A - tI_2) = t^2 - 8t + 7$ dan $a_{22} = 4$, nilaikan $\det A$, $a_{11}$ dan $a_{12}$.

*(50/100)*

(b) Andaikan $v \in \mathbb{R}^n$ dan $Q$ merupakan matriks $(n \times n)$ yang ditakrifkan sebagai

$$Q = I_n - 2vv^T .$$

(i) Buktikan bahawa $Q$ merupakan matriks simetri.

(ii) Tunjukkan bahawa $QQ = I_n$ jika $v^T v = 1$.

(iii) Buktikan bahawa $QAQ$ merupakan matriks simetri pencong jika $A$ merupakan matriks $(n \times n)$ dan simetri pencong.

*(30/100)*

(c) Andaikan $A$ dan $B$, kedua-duanya matriks $(n \times n)$. Buktikan bahawa $(AB)^T = B^T A^T$.

*(20/100)*

3. (a) Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} .$$

(i) Dapatkan kesemua nilai-nilai eigen $A$.

(ii) Bagi setiap nilai eigen, nyatakan suatu vektor eigen yang dikaitkan dengannya.

(iii) Adakah $A$ terpepenjurukan? Jika ya, dapatkan suatu matriks tak singular $P$ dan suatu matriks pepenjuru $D$ supaya $P^{-1}AP = D$. Jika tidak, nyatakan sebabnya.

.../3

(iv) Ruang eigen yang dikaitkan dengan nilai eigen $\lambda$ merupakan set $\{x \varepsilon \mathbb{R}^3 : Ax = \lambda x\}$. Berdasarkan keputusan yang telah anda perolehi di bahagian (i) dan (ii), dapatkan asas dan matra ruang eigen bagi setiap nilai eigen.

(v) Surihan (A) merupakan hasiltambah pemasukan-pemasukan di atas pepenjuru utama A. Apakah hubungan di antara surihan (A) dengan nilai-nilai eigen A?

*(70/100)*

(b) Andaikan A merupakan matriks (n x n) dengan pemasukan-pemasukan nyata dan $A^T A = I_n$. Jika $\lambda = r + is$ merupakan suatu nilaieigen A, buktikan bahawa $\lambda\bar{\lambda} = r^2 + s^2 = 1$.

*(30/100)*

4. (a) Adakah $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{array}{c} x + y - z = 1 \text{ dan } x - 2y + 4z = 0, \\ x, y, z \ \varepsilon \ \mathbb{R} \end{array} \right\}$ merupakan suatu subruang $\mathbb{R}^3$?

*(20/100)*

(b) Andaikan $P_3$ merupakan set kesemua polinomial nyata berdarjah 3 atau kurang yakni $P_3$ mengandungi kesemua polinomial p yang berbentuk

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ di mana}$$

$a_3, a_2, a_1, a_0$ merupakan sebarang pemalar nyata.

$P_3$ merupakan suatu ruang vektor nyata.

Andaikan $W = \{p \ \varepsilon \ P_3 : p(1) = p(-1) \text{ dan } p(2) = p(-2)\}$.

(i) Tunjukkan bahawa W merupakan suatu subruang $P_3$.

(ii) Nyatakan suatu asas bagi W.

*(50/100)*

.../4

(c) Andaikan A merupakan matriks (n x n) dan simetri. Andaikan $\lambda_1$ dan $\lambda_2$ merupakan nilai-nilai eigen A yang berbeza dengan vektor eigen sepadan $u_1$ dan $u_2$ yakni $Au_1 = \lambda_1 u_1$ dan $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Buktikan bahawa $u_1^T u_2 = 0$.

*(30/100)*

- oo0oo -