

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

MAT 101 Kalkulus

Masa : [jam]

Jawab semua soalan dari Bahagian A dan pilih tiga (3) soalan dari Bahagian B.

Bahagian A

1. (a) Biar $g(x) = x^2$ dan biar

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ nisbah} \\ 1, & x \text{ tak nisbah} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan y supaya $h(y) \leq g(y)$
- (ii) Dapatkan w supaya $g(w) \leq w$
- (iii) Dapatkan ϵ supaya $g(g(\epsilon)) = g(\epsilon)$.

(b) Lakarkan set semua titik yang memenuhi

$$|1 - x| = |y - 1|$$

(c) Nilaikan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 - \frac{x}{|x|} \right)$$

(d) Dapatkan nilai hampiran $\mathcal{L}(3.05)$ dengan

$$\mathcal{L}(m) = 4m^3 - m^4$$

(e) Jika $g(x)$ fungsi songsang kepada $f(x)$ dengan $f(x) = \sqrt{x-3}$ atas $[3, \infty)$,
dapatkan $g'(4)$ dan $g'(8)$.

(100/100)

...2/-

2. (a) Buktikan pernyataan berikut:

Jika f terbeza pada x_0 , maka f selanjar pada x_0 .

- (b) Biar $f(x) = |x| - 1$. Maka $f(-1) = f(1) = 0$ tetapi $f'(x)$ tidak sifar atas $[-1, 1]$. Adakah ini bercanggah dengan teorem Rolle?
- (c) Buktikan bahawa jika $h(t)$ adalah satu fungsi langkah atas $[a, b]$ dengan $f(t) \leq h(t)$ untuk semua nilai t dalam selang (a, b) , maka

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b h(t) dt$$

di mana F sebarang anti terbitan untuk f atas $[a, b]$.

- (d) Dengan meletak kamiran

$$\int \frac{dx}{x \ln(x)}$$
 dalam bentuk

$$\int f(u) u'(x) dx \text{ maka nilaikan kamiran tersebut.}$$

- (e) Diberi

$$\frac{1}{1 + 1/(k + \ell)} > \frac{1}{1 + 1/\ell}$$

dengan k dan ℓ nombor-nombor positif. Tunjukkan bahawa

$$f(k + \ell) > f(\ell)$$

di mana

$$f(x) = x/(x + 1)$$

(100/100)

...3/-

Bahagian B

3. (a) Buktikan bahawa $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 4) = 7$ dengan menggunakan takrif $\epsilon - \delta$.

(b) Buktikan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$$

(c) Andaikan f satu fungsi yang memuaskan $|f(x)| \leq |x|$ untuk semua x . Tunjukkan bahawa f selanjar pada 0.

(d) Andaikan $f(x)$ sebagai bilangan kilogram langsung yang anda boleh beli dengan x ringgit. Biar $g(y)$ sebagai fungsi songsang. Apakah yang diwakili oleh $g(y)$?

(e) Tunjukkan bahawa jika n ganjil, $f(x) = x^n$ boleh di songsangkan atas $(-\infty, \infty)$.

(100/100)

4. (a) Buktikan teorem berikut:

Teorem:

Jika f selanjar atas $[a, b]$ dan terbeza atas (a, b) , maka wujud satu $x \in (a, b)$ supaya

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(b) Dapatkan $f'(x)$ untuk fungsi f berikut:

$$f(x) = \frac{4}{x - \frac{3}{x^2 + \cos x}}$$

(c) Dapatkan $f'(0)$ jika

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

...4/-

dan

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

(d) Satu alat pengukur suhu diletakkan x sentimeter dari satu sumber api. Biar $f(x)$ bacaan suhu atas alat. Anggapkan bahawa gelas pada alat akan pecah apabila alat bersentuh dengan sumber api.

(i) Terangkan mengapa secara fizikal $f(0)$ tidak mempunyai makna.

(ii) Bincangkan makna yang boleh diberi kepada $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(100/100)

5. (a) Dapatkan satu fungsi atas $[-1, 1]$ yang selanjur tetapi tidak terbeza pada titik maksimumnya.

(b) Dapatkan $f'(s)$ di mana

$$f(s) = \int_0^{s^2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} dx.$$

(c) Tanpa menilaikan kamiran, tunjukkan bahawa

$$-3 \leq \int_1^2 (t^3 - 4)dt \leq 4.$$

(d) Permintaan untuk hasil-hasil kayu pada tahun 1985 adalah lebih kurang 12.6 billion kaki kubik. Dengan meneliti peningkatan permintaan, kita dapat menentukan bahawa X tahun selepas 1985, permintaan meningkat dengan $9X/100$ (iaitu $P'(X) = 9X/100$; $P(X)$ adalah permintaan X tahun selepas 1985).

(i) Dengan menggunakan teorem asas kalkulus, tunjukkan bahawa

$$P(X) = P(0) + \int_0^X \frac{9t}{100} dt.$$

...5/-

- (ii) Dapatkan $P(X)$
- (iii) Dapatkan permintaan kayu pada 1992.

(100/100)

6. (a) Dengan membuat gantian yang sesuai, selesaikan kamiran-kamiran berikut:

(i) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

dengan $0 < x < 1$.

(b) Kamirkan:

(i) $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(c) Dengan menggunakan kaedah pecahan separa kamirkan:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \sin^3 x}$$

(d) Gunakan kaedah petala silinder untuk mencari isipadu yang terjana apabila rantau R yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = x^2$ dikisarkan pada paksi- y .

(e) (i) Nilaikan $\int \sin ax \sin bx \, dx$, di mana a dan b pemalar.

(ii) Tunjukkan bahawa kamiran di atas adalah satu fungsi selanjar terhadap b untuk a dan x tetap.

(100/100)