

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAT101 Kalkulus

[Masa: 3 jam]

Jawab kesemua EMPAT soalan.

1. (a) Jika $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$,

cari domain bagi g .

(15/100)

(b) Diberi $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & , x < 0 \\ 3 & , 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{x^2}{5} - 2 & , x > 5 \end{cases}$

- (i) Tentukan semua titik yang mana f tidak selanjar.
(ii) Tentukan semua titik yang mana f tak terbezakan.
(iii) Cari f' di mana-mana ia wujud.

(25/100)

(c) Katakan $f(x) = \frac{\ln x}{1 + (\ln x)^2}$, $x > 0$

dan $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- (i) Cari $F'(x)$ dan tunjukkan bahawa $F'(e) = \frac{4}{5}e$.
(ii) Tunjukkan f mempunyai maksimum setempat apabila $x = e$.
(iii) Tunjukkan bahawa $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ bagi $x > 0$.

(40/100)

.../2

- (d) Seorang nelayan di sebuah dermaga menarik sebuah bot. Tangannya adalah 20m. di atas paras bagi titik pada bot yang mana tali terikat. Jika dia menarik tali dengan 2m./saat, berapa cepatkah sudut yang dibentukkan oleh tali diukur dari garis mengufuk itu bertambah apabila panjang tali berada pada jarak 50m. daripada bot kepada nelayan? .

(20/100)

2. (a) Cari had-had yang berikut:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{x+1}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5}}$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{n+1})}{(\sin x)^n}, \quad n \text{ adalah suatu integer positif.}$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \ln(\cos f(x))$$

dimana $\cos f(x) \geq 4x - x^2 - 3$ bagi $x \in (1, 3)$.

(40/100)

- (b) Gunakan konsep $\epsilon - \delta$ untuk menunjukkan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 14) = -5$$

(15/100)

- (c) Diberi $(a + bx) e^{y/x} = x$, tunjukkan bahawa

$$\left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2 = x^3 \frac{d^2y}{dx^2}$$

(25/100)

.../3

(d) Tunjukkan bahawa

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \frac{6}{5}$$

(20/100)

3. (a) (i) Katakan $x(t)$ dan $y(t)$ mempunyai terbitan peringkat kedua. Buktikan bahawa jika $x'(t) \neq 0$, maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

(ii) Jika diberi $x = \sin t$ dan $y = \sin kt$, tunjukkan bahawa

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + k^2y = 0$$

(25/100)

(b) Bagi fungsi $f(x) = x e^{-x^2}$,

- (i) cari titik genting
- (ii) tentukan di mana ianya menokok? menyusut?
- (iii) cari ekstremum setempat
- (iv) bincangkan kecekungan grafnya
- (v) lakarkan grafnya.

(30/100)

(c) Jika $f'(x) = \begin{cases} \frac{|x-4|}{x-2} & , x \leq 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$ dan $f(0) = 0$,

cari $f(x)$.

(20/100)

(d) (i) Nyatakan teorem nilai min.

(ii) Jika g selanjar pada $[a,b]$, tunjukkan bahawa terdapat suatu nombor $c \in (a,b)$ supaya

.../4

$$\int_a^b g(x) dx = g(c) (b-a).$$

(25/100)

4. (a) Bagi (i) - (iv), kamirkan

(i) $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$

(ii) $\int x \tan^2 x dx$

(iii) $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$

(iv) $\int_{0.5}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx$

(v) Tunjukkan

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx,$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}.$$

(50/100)

(b) Buktikan bahawa persamaan

$$\sin \pi x + 2x^2 - 3x = 0.5$$

mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian.

(15/100)

(c) Suatu segitiga duasama dikisarkan terhadap suatu paksi yang melalui tapaknya. Jika perimeter segitiga ialah 20 unit, cari dimensi segitiga supaya isipadu kisanan yang dibentuk adalah maksimum.

(35/100)