UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

MAT101 - Kalkulus

Tarikh: 28 Oktober 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari

(3 jam)

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Jika f merupakan fungsi satu dengan satu, maka f mempunyai fungsi songsang f^{-1} yang memenuhi

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{dan} \quad f^{-1} \circ f(x) = x$$

(i) Buktikan $\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

jika $f'(x) \neq 0 \quad \forall \quad x \in \text{dom}(f')$.

(ii) Jika $f'(x) = 1 + (f(x))^2$, dapatkan rumus $(f^{-1})'(x)$.

(b) Tentukan had berikut, jika wujud

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4 + 3x + x^7 + 2}{3x^5 + 4x^7 + 1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ jika f(x) memenuhi

$$\frac{3x + 1}{2x^2 + 2} \leq f(x) \leq \frac{1/x + 2/x^2 + 1}{4 + x + 4/x^2}$$

(c) Selesaikan ketaksamaan berikut

(i) $x^3 + 1 > x^2 + x$

(ii) $\left|\dfrac{6 - 5x}{3 + x}\right| \leq \frac{1}{2}$

(100/100)

2. (a) Takrifkan apakah yang dimaksudkan apabila suatu fungsi dikatakan selanjar pada suatu nombor c. Seterusnya, tentukan sama ada fungsi berikut selanjar pada c yang diberikan

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ pada $c = 3$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}, & x \neq -3 \\ -x, & x = -3 \end{cases}$ pada $c = -3$

(iii) $f(x) = |x - 6|$ pada $c = 6$

(b) (i) Takrifkan terbitan suatu fungsi f pada sebarang nombor $x \in$ dom (f).

(ii) Seterusnya, gunakan takrif tersebut untuk menunjukkan bahawa $f(x) = |x + 1|$ tak terbezakan pada $x = -1$.

(c) Cari $\dfrac{dy}{dx}$, jika

(i) $x \sin y + \sec x = x^2 y + 3$

(ii) $y = e^x \log_3 x$

(iii) $y = (5^{\ln x}) \ln x$

(100/100)

3. (a) Teorem nilai min menyatakan bahawa jika untuk suatu fungsi f yang terbezakan pada selang (a, b) dan selanjar pada selang [a, b], maka terdapat nilai $c \in (a, b)$ supaya

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Buktikan teorem tersebut.

(<u>Petunjuk</u>: Tunjukkan bahawa fungsi g dengan
$g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$
memenuhi syarat-syarat Teorem Rolle)

(b) Bagi fungsi $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

(i) Nyatakan selang-selang f menokok, menyusut, graf f cekung ke atas dan cekung ke bawah.

(ii) Tentukan nilai maksimum tempatan, minimum tempatan dan titik lengkok balas.

(iii) Lakarkan graf tersebut.

(ç) Dengan menggunakan pembeza, cari nilai hampiran bagi $\sqrt[3]{1008}$.

(100/100)

4. (a) Anggarkan luas di bawah graf $f(x) = 9 + x^2$, dari $x = 0$ hingga $x = 3$ dengan menggunakan penghasiltambahan dan mempartisikan selang $[0, 3]$ kepada n subselang sama lebar.

$\left(\underline{\text{Petunjuk}}: \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$.

(b) Jika F merupakan anti terbitan untuk fungsi selanjar f bagi semua $x \in [a, b]$, nyatakan Teorem Asasi Kedua Kalkulus. Dengan ini, buktikan bahawa

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

dengan g dan h merupakan fungsi yang terbezakan.

(c) Kamirkan

(i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x + 1}{2x^2 - x - 1}\,dx$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{3e^{-t}}{1 + 4e^{-t}}\,dt$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

(100/100)

5. (a) Dapatkan $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$, $x < 1$, untuk setiap integer positif n.

(b) Nyatakan suatu domain tersekat fungsi f jika $f(x) = \text{kos } x$, supaya f mempunyai songsang yang diberikan sebagai $f^{-1}(x) = \text{arc kos } x$. Buktikan bahawa

(i) $\text{arc kos } x = \dfrac{\pi}{2} - \text{arc sin } x$, bagi $|x| \leq 1$.

(Petunjuk: $\text{kos } (\frac{1}{2}\pi - \theta) = \sin \theta$).

(ii) $\dfrac{d}{dx}(\text{arc kos } x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) Cari luas rantau yang dibatasi oleh graf f dan g jika $f(x) = (x-1)^{1/3}$ dan $g(x) = (x-1)^3$.

(100/100)

- oooOOooo -