UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

MAK291 - Matematik II

Tarikh: 27 Oktober 1988

Masa: 2.15 petang - 5.15 petang (3 jam)

Jawab semua soalan. Setiap soalan memberi 100 markah.

1. Nyatakan, tanpa bukti, bagaimana menjelmakan kamiran ganda dua

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy$$ dengan penukaran pemboleubah: $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Jika R merupakan luas yang dibatasi oleh elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gunakan penukaran

$x = a\rho \cos\theta$, $y = b\rho \sin\theta$ untuk menunjukkan

bahawa

$$\iint_R \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{b^2x^2 + a^2y^2}\,dxdy = \frac{\pi (a^4 + b^4)}{2ab}.$$

2. Tunjukkan bahawa penyelesaian bagi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

pada rantau: $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq \alpha$ dengan $\phi = 0$ melalui garis-garis lurus $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$ dan $\phi = \phi_0$ (= malar) melalui $y = \alpha$ ialah

$$\phi(x, y) = \frac{4\phi_o}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{\text{Cosech } (2r+1)\pi}{2r+1} \text{Sinh}(2r+1)\frac{\pi y}{\alpha} \; \text{Sin}(2r+1)\frac{\pi x}{\alpha} \right\}$$

3. Satu jujukan $\{u_n\}$ ditakrifkan secara berikut:

   u_1 dipilih sebagai sebarang nombor terhingga, kecuali 0, dan

$$u_n = \tfrac{1}{2}\left\{u_{n-1} + \frac{1}{10u_{n-1}}\right\} \quad \text{untuk} \quad n \geq 2$$

   Tunjukkan bahawa

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

4. (i) Jika $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \Big/ \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = 1.$$

   (ii) Jika $z = f(x, y)$ dan $x = e^u$, $y = e^v$ tunjukkan bahawa:

   (a) $$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

   (b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

5. Adakah siri-siri berikut menumpu?

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n)]^k}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

   (iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^2}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^2 + 6}$

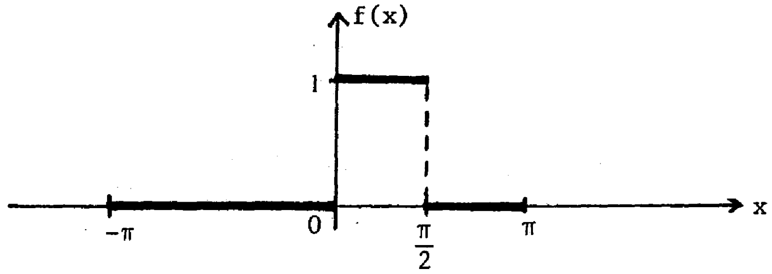
   Nyatakan dengan jelas sebarang teorem ujian yang anda gunakan.

6. Selesaikan persamaan berikut, sah bersekitar asalan untuk $x > 0$,

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0 .$$

.../3

7. (i) Dapatkan siri Fourier bagi fungsi berikut yang dianggap mempunyai kala 2π,



(ii) Fungsi f(x) ditakrifkan seperti berikut:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x + a), \qquad -a \leq x \leq -\frac{a}{2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}x \qquad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - a) \qquad \frac{a}{2} \leq x \leq a$$

Dapatkan kembangan siri Fourier, sah pada selang (-a, a).

- oooOOooo -