

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

MAK291 Matematik II

Masa : [3 jam]

Jawab kesemua EMPAT (4) soalan.

1. (a) Diberi $2u^2 + x + yv = z + 2$
 $u + v + xu + xy^2 = 2$.
Pada titik $(z, u, v) = (2, 1, 1)$, $x = 0$ dan $y = 2$.
Cari $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{u,v}$ pada titik ini.

- (b) f adalah suatu fungsi x, y yang terbezakan dan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

- (i) Tunjukkan bahawa

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

- (ii) Cari nilai $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ pada $r = 2$ dan $\theta = \frac{\pi}{2}$ jika diberi pada titik itu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$$

- (c) Suatu kilang mempunyai tiga mesin yang masing-masing mengeluarkan x, y dan z unit sejenis barangan setiap hari. Keuntungan P daripada barangan ini diberikan sebagai

$$P(x, y, z) = 3xyz^2 - 200x - 200y - 200z$$

Jika jumlah bilangan yang dikeluarkan mematuhi syarat $x + y + z = 1000$, apakah nilai x, y, z supaya keuntungan dimaksimumkan.

...2/-

(d) $S(V, T)$ dan $E(V, T)$ adalah fungsi yang mempunyai terbitan separa peringkat kedua yang selanjar.

(i) Tuliskan pembeza seluruh dS dan dE .

(ii) Jika P, V, T, E, S dihubungi dengan

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV$$

$$\text{dan } PV = RT$$

di mana R adalah suatu pemalar, tunjukkan bahawa $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$.

[Petunjuk: gunakan (i)].

(100/100)

2. (a) Cari nilai kamiran yang berikut:

(i) $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$ di mana D adalah rantau yang di batasi oleh lengkung $y = e^x$, $x = 1$, $x = 2$ dan paksi x .

(ii) $\int_0^1 \int_y^1 ye^{x^3} dx dy$

(iii) $\iiint_K z dx dy dz$
di mana K adalah bongkah yang terbatas dari atas oleh satah $z = 5$ dan dari bawah oleh kon $x^2 + y^2 = z^2$.

(b) Suatu pondok berbentuk cendawan. Ia terdiri daripada suatu bumbung yang terletak di atas suatu tiang. Bumbung itu merupakan suatu bongkah yang dibatasi oleh paraboloid $z = 10 - \frac{1}{25}(x^2 + y^2)$ dan satah $z = 9$ sedangkan tiang adalah silinder $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, 0 \leq z \leq 9\}$
Cari isipadu bahan yang diperlukan untuk membina pondok ini.

...3/-

(c) Tunjukkan bahawa

$$\iint_T \frac{\tan^{-1}x}{x^2 + y^2 + 1} dx dy \leq \frac{\pi}{8}$$

di mana T merupakan kawasan segitiga yang dibatasi oleh garis $y + x = 1$, paksi x dan paksi y.

[Petunjuk: anggarkan nilai kamiran]

(100/100)

3. (a) (i) Cari $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jika

$$\frac{n^2 - n - 3}{2n^2} \leq a_n \leq \frac{3n^3 + 1}{6n^3 - 2n^2 - 1}$$

(ii) Diberi $a_1 = \frac{1}{9}$ dan $a_n = a_{n-1} + \frac{2}{9^n}$, $n \geq 2$.

Cari $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jika wujud.

Tentukan juga sama ada siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu atau mencapah.

(b) Tentukan sama ada siri yang berikut menumpu atau mencapah.

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 5}$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n \sin n.$$

(c) Cari selang penumpuan bagi siri kuasa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + n} (x - 1)^n.$$

...4/-

(d) Dapatkan siri kosinus Fourier bagi fungsi

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

Dengan ini dan persamaan Parseval tunjukkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Dengan siri kosinus Fourier ini, tunjukkan juga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(100/100)

4. (a) Selesaikan persamaan Euler yang berikut bagi $x > 0$

$$2x^2y'' + 10xy' + 8y = \frac{1}{x^2}.$$

(b) Camkan titik-titik biasa, singular sekata dan singular tak sekata bagi persamaan

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + (1+x)y = 0.$$

Cari penyelesaian am bagi persamaan ini berhampiran titik 0 dan sah bagi $x > 0$.

(c) (i) Cari siri Taylor bagi fungsi $f(x) = \frac{1}{1-x}$ di sekeliling titik 0. Kemudian tunjukkan

$$\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{x}{1-x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+2}$$

Dengan ini dedusikkan nilai siri $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k}$

(100/100)

- oooOOooo -