

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAK 291 Matematik II

Masa : [ jam]

---

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Jelaskan mengapa satu daripada teorem-teorem berikut tidak tepat.

Teorem (i)

Jika sesuatu jujukan itu dibatasi, ianya menumpu

Teorem (ii)

Jika sesuatu jujukan itu menumpu, ianya dibatasi.

Anda boleh menggunakan contoh-contoh tertentu untuk hujah anda.

- (b) Dengan menggunakan keputusan

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh, \quad \text{untuk } h > 0$$

tunjukkan bahawa

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$  jika  $a > 1$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  jika  $0 < a < 1$

- (c) Carikan hasil tambah siri berikut:

$$\left(1 + 1\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8^2}\right) + \dots$$

- (d) Ujikan siri-siri berikut untuk penumpuan. Anda perlu nyatakan ujian-ujian yang digunakan.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1$       (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$

...2/-

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(iv)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

2. (a) Kembangkan  $f(x) = (1 - x)^{-1}$  bersekitaran  $-1$  dan carikan selang penumpuannya.

(b) Selesaikan persamaan pembeza

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

dengan memberi jawapan dalam bentuk siri kuasa.

(c) Kelaskan kesingularan bagi persamaan pembeza berikut dan dengan ini selesaikan persamaan

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{5}{36}\right)y = 0,$$

sah untuk  $x > 0$ .

3. (a) Jika

$$z = f(x^2 - y^2),$$

tunjukkan bahawa

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y \frac{\partial z}{\partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x}$$

(b) Dapatkan titik-titik pegun bagi permukaan

$$u(x, y) = x^3 + xy + y^2$$

dan tentukan jenis titik-titik ini.

(c) Selesaikan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

.....3/-

tertakluk kepada syarat-syarat

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq l \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial t} (x, t) \right]_{t=0} &= g(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

(d) Kelaskan setiap persamaan berikut:

$$(i) \quad 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(iii) \quad 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4. (a) Nilaikan

$$\iint_R (x + y) dx dy$$

$$R : \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1\}$$

(b) Jelaskan cara menjelmakan kamiran

$$I = \iint_R f(x, y) dx dy$$

kepada kamiran yang hanya melibatkan koordinat kutub. Dengan meletak  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , buktikan bahawa

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2 + 2xy \cos \alpha + y^2)} dx dy = \frac{\alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$0 \leq \alpha < \pi.$$

... 4/-

(c) Dengan mengambil  $x = y$  dalam hubungan

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du$$

tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{[\Gamma(x)]^2}{\Gamma(2x)} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tau\right)^{x-1} \tau^{-\frac{1}{2}} d\tau \\ &= 2^{1-2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

- oooOOooo -