UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2007/2008

October/November 2007

MST 562 – Stochastic Processes
[Proses Stokastik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]*

...2/-

1. (a) Independent trials each resulting in a success with probability p, are successively performed. Let N be the time of the first success. By conditioning on Y, where

$$Y = \begin{cases} 1, & \textit{if the first trial is a success} \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

find $E(N)$ and $Var(N)$.

(b) Write short notes on the following:

(i) recurrent state
(ii) transient state
(iii) stationary increment
(iv) independent increment

(c) Consider a Markov chain consisting of five states 0, 1, 2, 3, 4 and having transition probability matrix

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(i) Specify the classes of the Markov chain.
(ii) Determine whether they are transient or recurrent.

[100 marks]

2. (a) A particle moves on a circle through points which have been marked 0, 1, 2, 3, 4 (in a clockwise order). At each step, it has a probability p of moving to the right (clockwise) and $1 - p$ to the left (counterclockwise). Let X_n denote its location on the circle after the n^{th} step.

(i) Explain why the process $\{ X_n, n \geq 0\}$ is a Markov chain and find the transition probability matrix.
(ii) Compute $P\{ X_5 = 4, X_6 = 0, X_7 = 1, X_8 = 0 | X_4 = 0\}$
(ii) Calculate the limiting probabilities π_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

(b) A store promises to give a small gift to every thirteenth customer to arrive. If the arrivals of customers form a Poisson process with rate λ,

...3/-

1. (a) *Percubaan saling tak bersandar dijalankan berturut-turut dan setiap satu menghasilkan kejayaan dengan kebarangkalian p. Andaikan N ialah masa kejayaan pertama. Dengan bersyaratkan Y, di mana*

$$Y = \begin{cases} 1, & \textit{jika percubaan pertama menghasilkan kejayaan} \\ 0, & \textit{sebaliknya} \end{cases}$$

dapatkan E(N) dan Var(N).

(b) *Tuliskan nota pendek mengenai yang berikut:*

(i) *keadaan jadi semula*
(ii) *keadaan fana*
(iii) *peningkatan pegun*
(iv) *peningkatan tak bersandar*

(c) *Pertimbangkan rantai Markov yang mengandungi lima keadaan 0, 1, 2, 3, 4 dan mempunyai matriks kebarangkalian peralihan.*

$$\boldsymbol{P} = \begin{Vmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

(i) *Nyatakan kelas-kelas rantai Markov di atas.*
(ii) *Tentukan sama ada kelas-kelas tersebut fana atau jadi semula.*

[100 markah]

2. (a) *Sebutir zarah bergerak sepanjang suatu bulatan yang ditandai dengan 0, 1, 2, 3, 4 (dalam tertib arah jam). Pada setiap langkah, ia mempunyai kebarangkalian p untuk bergerak ke kanan (arah jam) dan kebarangkalian 1 – p untuk bergerak ke kiri (arah lawan jam). Andaikan X_n mewakili lokasinya pada bulatan selepas langkah ke-n.*

(i) *Jelaskan sebab proses $\{X_n, n \geq 0\}$ merupakan rantai Markov dan dapatkan matriks kebarangkalian peralihannya.*
(ii) *Hitung* $P\{X_5 = 4, X_6 = 0, X_7 = 1, X_8 = 0 \mid X_4 = 0\}$
(iii) *Dapatkan kebarangkalian penghad* π_i, *i = 0, 1, 2, 3, 4*

(b) *Sebuah kedai menjanjikan suatu hadiah kecil untuk setiap pelanggan ketiga-belas yang tiba di kedainya. Jika ketibaan pelanggan membentuk suatu proses Poisson dengan kadar* λ,

...4/-

(i) show that the probability density function of the times between the lucky arrivals is given by

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^{12}}{12!}\right].$$

(ii) find $P\{M_t = k\}$ where M_t is the number of gifts given in the interval [0, t].

(c) The number of trials to be performed in an experiment is a Poisson random variable with mean λ. Each trial has k possible outcomes and, independent of everything else, results in outcome type i with probability P_i , $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$. Let X_n denote the number of outcomes that occur exactly n times, $n = 0, 1, \ldots$ Compute $E[X_n]$ and $Var(X_n)$.

[100 marks]

3. (a) In a branching process, the number of offspring per individual in a population has a binomial distribution with parameters 2 and p. Starting with $X_0 = 1$,

(i) find the expected number of individual that ever exist in this population.
(ii) calculate the extinction probability.

(b) Potential customers arrive at a one-pump gas station at a Poisson rate of 20 cars per hour. However, customers will only enter the station for gas if there are no more than two cars (including the one presently being attended to) at the pump. Suppose the amount of time required to service a car is exponentially distributed with a mean of five minutes.

(i) What proportion of the attendants's time will be spent servicing cars?
(ii) What proportion of potential customers are lost?

(c) An insurance company pays out claims on its life insurance policies in accordance with a Poisson process having rate $\lambda = 5$ per week. The amount of money paid on each policy is exponentially distributed with mean RM10 000.

(i) What is the expected time until the tenth claim arrives?
(ii) Calculate the mean and variance of the amount of money paid by the insurance company in a month?

[100 marks]

...5/-

(i) *tunjukkan bahawa fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi masa antara ketibaan bertuah diberikan oleh*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^{12}}{12!}\right].$$

(ii) *dapatkan* $P\{M_t = k\}$ *di mana* M_t *ialah bilangan hadiah yang diberikan dalam selang [0, t].*

(c) Bilangan percubaan yang akan dijalankan dalam sutu ujikaji adalah suatu pembolehubah rawak Poisson dengan min λ*. Setiap percubaan mempunyai k kesudahan yang mungkin dan menghasilkan kesudahan jenis i dengan kebarangkalian* P_i, $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$, *bebas daripada semua perkara lain. Andaikan* X_n *mewakili bilangan kesudahan yang berlaku tepat n kali, n = 0, 1, . . . Hitung* $E[X_n]$ *dan* $Var(X_n)$.

[100 markah]

3. *(a) Dalam suatu proses bercabang, bilangan anak bagi setiap individu dalam suatu populasi mempunyai taburan binomial dengan parameter 2 dan p. Bermula dengan* $X_0 = 1$,

(i) *dapatkan bilangan individu yang pernah wujud dalam populasi tersebut.*
(ii) *hitung kebarangkalian kepupusan.*

(b) Bakal pelanggan tiba di sebuah stesen minyak satu-pam pada kadar Poisson 20 buah kereta setiap jam. Walau bagaimanapun, pelanggan akan masuk ke stesen tersebut untuk mengisi minyak hanya jika terdapat tidak lebih daripada dua buah kereta (termasuk kereta yang sedang dilayan) di pam tersebut. Andaikan amaun masa yang diperlukan untuk servis sebuah kereta tertabur secara eksponen dengan min lima minit.

(i) *Berapakah kadaran masa pelayan yang akan dihabiskan untuk servis kereta- kereta?*
(ii) *Berapakah kadaran bakal pelanggan yang hilang?*

(c) Sebuah syarikat insuran membayar tuntutan ke atas polisi insuran nyawa mengikut suatu proses Poisson dengan kadar $\lambda = 5$ *setiap minggu. Amaun yang dibayar kepada setiap polisi tertabur secara eksponen dengan min RM10 000.*

(i) *Apakah masa jangkaan sehingga tuntutan kesepuluh tiba?*
(ii) *Hitung min dan varians bagi amaun yang dibayar oleh syarikat insuran tersebut dalam satu bulan?*

[100 markah]

...6/-

4. (a) Let X_1, X_2, ... denote the interarrival times of events of a nonhomogeneous Poisson process having intensity function $\lambda(t)$.

   (i) Are the X_i's independent and identically distributed? Explain your answer.
   (ii) Find the distribution of X_1 and X_2.
   (iii) If $\lambda(t) = 2t + 2$, what is the probability that n events occur between time $t = 4$ and $t = 5$?

   (b) Consider a taxi station where taxis and customers arrive in accordance with Poisson processes with respective rates of one and two per minute. A taxi will wait no matter how many other taxis are present. However, if an arriving customer does not find a taxi waiting, he leaves.

   (i) Set the above problem as a birth and death model.
   (ii) Find the average number of taxis waiting.
   (iii) Determine the proportion of customers that get taxis.

   (c) Mr. M has a policy that he buys a new computer as soon as his present computer breaks down or when it reaches the age of T years. The lifetime of a computer is a continuous random variable having a distribution F and probability density f. Suppose that a new computer costs RM C_1 and an additional cost of RM C_2 is incurred whenever Mr. M's computer breaks down. Assuming that a T-year-old computer in working order has an expected resale value $R(T)$,

   (i) find Mr. M's long-run average cost.

   Suppose that the lifetime of a computer (in years) is uniformly distributed over (2, 8). Also suppose that a new computer costs RM7000, a break down costs RM200 and $R(T) = 0$.

   (ii) What value of T minimizes Mr. M's long-run average cost?

[100 marks]

4. (a) *Andaikan* $X_1, X_2, \ldots$ *mewakili masa-antara-ketibaan bagi peristiwa-peristiwa proses Poisson tak homogen yang mempunyai fungsi intensiti* $\lambda(t)$.

   (i) *Adakah* X_i *tak bersandar dan tertabur secaman? Jelaskan jawapan anda.*
   (ii) *Dapatkan taburan bagi* X_1 *dan* X_2.
   (iii) *Jika* $\lambda(t) = 2t + 2$, *berapakah kebarangkalian bahawa n peristiwa berlaku antara masa* $t = 4$ *dan* $t = 5$?

(b) *Pertimbangkan suatu stesen teksi di mana teksi dan pelanggan masing-masing tiba mengikut proses Poisson dengan kadar satu dan dua setiap minit. Sebuah teksi akan menunggu tanpa mengambil kira bilangan teksi lain yang menunggu. Walau bagaimana pun, seorang pelanggan yang tiba dan mendapati tiada teksi menunggu, akan meninggalkan stesen.*

   (i) *Bentukkan masaalah di atas sebagai suatu model kelahiran dan kematian.*
   (ii) *Dapatkan purata bilangan teksi yang menunggu.*
   (iii) *Tentukan kadar pelanggan yang mendapat teksi.*

(c) *Encik M mempunyai dasar untuk membeli sebuah komputer baru sebaik sahaja komputernya yang sedia ada rosak atau mencapai usia T tahun. Masa hayat sebuah komputer ialah suatu pembolehubah rawak selanjar dengan taburan F dan ketumpatan kebarangkalian f. Andaikan kos sebuah komputer baru ialah RM* C_1 *dan kos tambahan sebanyak RM* C_2 *terlibat setiap kali komputer Encik M rosak. Dengan mengandaikan bahawa sebuah komputer berusia T-tahun yang masih berfungsi mempunyai nilai jual-balik yang dijangka R(T),*

   (i) *dapatkan kos purata jangka panjang bagi Encik M.*

Andaikan masa hayat sebuah komputer (dalam tahun) tertabur secara seragam pada (2, 8). Juga andaikan bahawa kos sebuah komputer baru ialah RM7000, kos kerosakan ialah M200 dan $R(T) = 0$.

   (ii) *Apakah nilai T yang meminimumkan kos purata jangka panjang bagi Encik M?*

[100 markah]

- ooo O ooo -