

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
Academic Session 2007/2008

October/November 2007

**MST 564 – Statistical Reliability**  
**[Kebolehpercayaan Statistik]**

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all four** [4] questions.

**[Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]

...2/-

1. (a) Give the definition of a survivor function and its properties. Does the function

$$S(t) = \begin{cases} 1-t & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

satisfy the properties of a survivor function for some variable  $T$ ? What is the distribution of  $T$ ?

[20 marks]

- (b) The failure rate of a component is given by

$$h(t) = ae^{-bt} , \quad t > 0 , a > 0 , b > 0$$

- (i) Determine the survival function and the probability density function.  
 (ii) Does this distribution has an IFR or a DFR?  
 (iii) Determine the probability of the survival of the component given that the component has survived up to  $x$ .

[40 marks]

- (c) Consider the problem of designing a life test in which 20 electric motors are run to destruction, giving independent observations  $T_1, T_2, \dots, T_{20}$  (measured in hours) from a Weibull distribution with the probability density function as follows

$$f(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta} , \quad t \geq 0$$

Let  $\beta = \frac{1}{2}$  and  $\lambda = \frac{1}{10}$

- (i) Determine the test fixed duration,  $L$ , which should ensure that 95% of the motors will have burned out by the test termination time.  
 (ii) Determine the probability that all of the 20 test motors fail before  $t$ .  
 (iii) Give an expression for the probability that the first motor to fail (from amongst the 20 on test) does so after  $t$ .

[40 marks]

2. (a) Suppose the lifetime  $T$  of a certain type of components is a continuous random variable with survivor function  $S(t)$ . To reduce in-service failures, all components inclusive of those that are still surviving are removed from service and replaced with 'new' ones. Others that fail before time  $\tau$  are replaced on failure. Show that the mean useful life of a component is given by

$$\int_0^\tau S(t) dt$$

[30 marks]

...3/-

1. (a) Beri definisi bagi suatu fungsi survivor serta ciri-cirinya. Adakah fungsi

$$S(t) = \begin{cases} 1-t & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

memenuhi ciri-ciri bagi suatu fungsi survivor untuk pembolehubah  $T$  ?  
Apakah taburan bagi  $T$  ?

[20 markah]

- (b) Kadar kegagalan bagi satu komponen diberikan oleh

$$h(t) = ae^{-bt} , \quad t > 0 , a > 0 , b > 0$$

- (i) Tentukan fungsi survivor dan fungsi ketumpatan kebarangkalian.  
(ii) Adakah taburan ini mempunyai satu IFR atau DFR?  
(iii) Tentukan kebarangkalian komponen masih berfungsi diberikan komponen telah berfungsi sehingga  $x$ .

[40 markah]

- (c) Pertimbangkan satu masalah merekabentuk suatu ujian hayat dengan 20 motor elektrik dijalankan sehingga kerosakkan berlaku. Hasilnya ialah cerapan tak bersandar  $T_1, T_2, \dots, T_{20}$  ( diukur dalam jam ) daripada suatu taburan Weibull dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian seperti berikut

$$f(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta} , \quad t \geq 0$$

Andaikan  $\beta = \frac{1}{2}$  dan  $\lambda = \frac{1}{10}$

- (i) Tentukan jangkamasa ujian yang ditetapkan,  $L$  , yang akan menentukan bahawa 95% daripada motor-motor tersebut akan gagal berfungsi pada masa tamat ujian.  
(ii) Tentukan kebarangkalian bahawa kesemua 20 motor tersebut gagal berfungsi sebelum masa  $t$ .  
(iii) Berikan satu ungkapan kebarangkalian bahawa motor pertama gagal berfungsi ( daripada 20 yang diuji ) terjadi selepas masa  $t$ .

[40 markah]

2. (a) Andaikan masa hayat  $T$  bagi sejenis komponen tertentu adalah suatu pembolehubah rawak selanjar dengan fungsi survivor  $S(t)$  . Untuk mengurangkan kegagalan semasa digunakan, semua komponen termasuk yang masih berfungsi telah dikeluarkan dan diganti dengan yang 'baru'. Komponen lain yang gagal berfungsi sebelum masa  $\tau$  diganti semasa ia gagal berfungsi. Tunjukkan bahawa min hayat berguna bagi suatu komponen diberikan oleh

$$\int_0^\tau S(t) dt$$

[30 markah]

...4/-

- (b) The following data is obtained from a life test, assuming that it is exponentially distributed with parameter  $\lambda$ . A total of 16 components were tested and the test was terminated after the 12<sup>th</sup> failure. The life times of the components, in days, are as follows;

1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 8 10

- (i) Obtain the expression for the log likelihood function  $\ell(\lambda) = \ln L(\lambda)$ . Hence, find the maximum likelihood estimator for the parameter  $\lambda$  and the Fisher's Information,  $I(\lambda)$ .
- (ii) Find a 95% confidence interval for the parameter  $\lambda$  and a 95% confidence interval for the component reliability at  $t = 8$  days.  
[40 marks]
- (c) Consider a life testing situation for which a manufacturer claims that his product has an exponential time to failure with a mean of 10,000 hours. A consumer questions this claim and will tolerate a consumer's risk of no more than  $\beta = 0.10$  when the population mean is 3500 hours. Find the smallest number of failures,  $r$ , to satisfy both the producer and consumer. Assume there is type II censoring.  
[30 marks]
3. (a) Let  $T_1, T_2, \dots, T_n$  be  $n$  independent continuous lifetime random variables. Define a new random variable  $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ .
- (i) If  $T_i$  has the hazard functions  $h_i$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ , show that the lifetime random variable  $T$  has the hazard function 
$$h(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t).$$
- (ii) If  $T_i$  has the survival function  $S(t) = \exp\{-\alpha_i t^\beta\}$  for  $\alpha_i > 0$  and  $\beta > 0$ , determine the hazard function for  $n^{\frac{1}{\beta}} T$ .  
[40 marks]
- (b) Suppose under laboratory condition in which failure of the device is accelerated, the lifetime of the device is denoted by  $T_1$  with corresponding density, survivor and hazard functions  $f_1(t)$ ,  $S_1(t)$  and  $h_1(t)$  respectively. Then if  $T_1 = \frac{T_0}{\phi}$ , where lifetime  $T_0$  has the density, survivor and hazard functions  $f_0(t)$ ,  $S_0(t)$  and  $h_0(t)$  respectively, show that

...5/-

- (b) Data berikut diperoleh daripada satu ujian hayat, dengan anggapan bahawa ianya tertabur secara eksponen dengan parameter  $\lambda$ . Sebanyak 16 komponen telah diuji dan ujian tersebut telah dihentikan selepas kegagalan ke-12. Masa hayat komponen-komponen tersebut, dalam hari, adalah seperti berikut;

1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 8 10

- (i) Dapatkan ungkapan bagi log fungsi kebolehdadian  $\ell(\lambda) = \ln L(\lambda)$ . Seterusnya, dapatkan penganggar kebolehdadian maksimum bagi parameter  $\lambda$  dan Fisher's Information,  $I(\lambda)$ .
- (ii) Dapatkan satu selang keyakinan 95% bagi parameter  $\lambda$  dan satu selang keyakinan 95% kebolehppercayaan komponen pada masa  $t = 8$  hari.

[40 markah]

- (c) Pertimbangkan satu situasi ujian hayat dimana seorang pengeluar mendakwa bahawa hasil pengeluarannya mempunyai masa kegagalan eksponen dengan min 10,000 jam. Seorang consumer mempersoalkan dakwaan ini dan dia akan menerima satu risiko konsumer yang tidak lebih daripada  $\beta = 0.10$  apabila min populasi adalah 3500 jam. Dapatkan bilangan kegagalan yang terkecil,  $r$  untuk memuaskan kedua-dua pembekal dan pembeli. Andaikan bahawa terdapat penapisan data jenis II.

[30 markah]

3. (a) Andaikan  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sebagai  $n$  pembolehubah rawak masa hayat selanjar tak bersandar. Takrifkan satu pembolehubah baru  $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ .

- (i) Jika  $T_i$  mempunyai fungsi bahaya  $h_i$  bagi  $i = 1, 2, \dots, n$ , tunjukkan bahawa pembolehubah rawak masa hayat  $T$  mempunyai fungsi bahaya  $h(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t)$ .

- (ii) Jika  $T_i$  mempunyai fungsi survival  $S(t) = \exp\{-\alpha_i t^\beta\}$  bagi  $\alpha_i > 0$  dan  $\beta > 0$ , tentukan fungsi bahay bagi  $n^{\frac{1}{\beta}} T$ .

[40 markah]

- (b) Andaikan bahawa di bawah keadaan makmal dimana kegagalan alat dipercepatkan, masa hayat alat tersebut ditandakan oleh  $T_1$  dengan fungsi ketumpatan, fungsi survivor dan fungsi bahaya yang berkaitan adalah masing-masing  $f_1(t)$ ,  $S_1(t)$  dan  $h_1(t)$ . Oleh itu jika  $T_1 = \frac{T_0}{\phi}$ , dengan masa hayat  $T_0$  mempunyai fungsi ketumpatan, fungsi survivor dan fungsi bahaya, masing-masing  $f_0(t)$ ,  $S_0(t)$  dan  $h_0(t)$ , tunjukkan bahawa

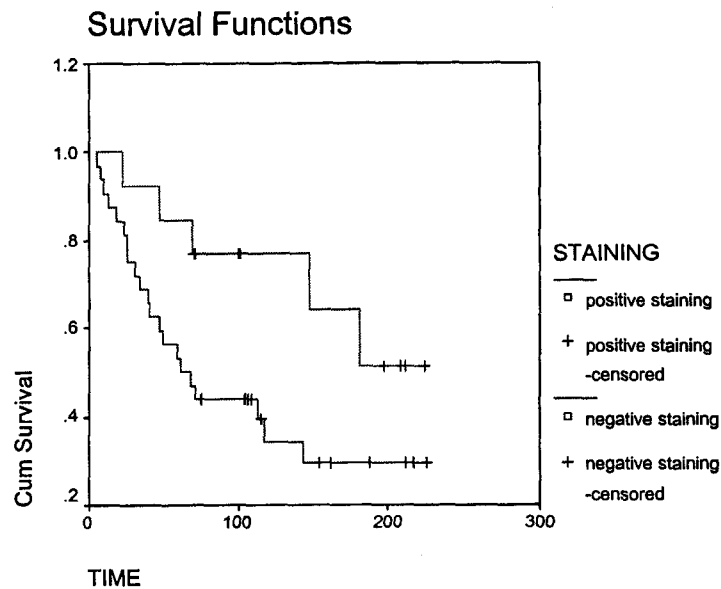
...6/-

- (i)  $S_1(t) = S_0(\varphi t)$   
(ii)  $f_1(t) = \varphi f_0(\varphi t)$   
(iii)  $h_1(t) = \varphi h_0(\varphi t)$

[30 marks]

(c) A study was carried out to investigate whether HPA staining can be used to predict the survival experience of women who present with breast cancer. The survival times ( in months ) of women with tumours that were negatively or positively stained with HPA were recorded.

- (i) The survival functions for the two groups of positive staining and negative staining and the log – rank test were given below. Use these information to test whether or not there is a difference in the survival experience of the two groups of women. Write your conclusion.



Log Rank Statistic	df	Significance
3.51	1	0.0608

- (ii) The result of the staining process can be regarded as a factor with two levels and the proportional hazards model was fitted. The output from SPSS below gives the estimated value of the ratio of the hazard of death at time  $t$  for positively stained relative to negatively stained women. Write your conclusion. Compare this conclusion with part (i).

[30 marks]

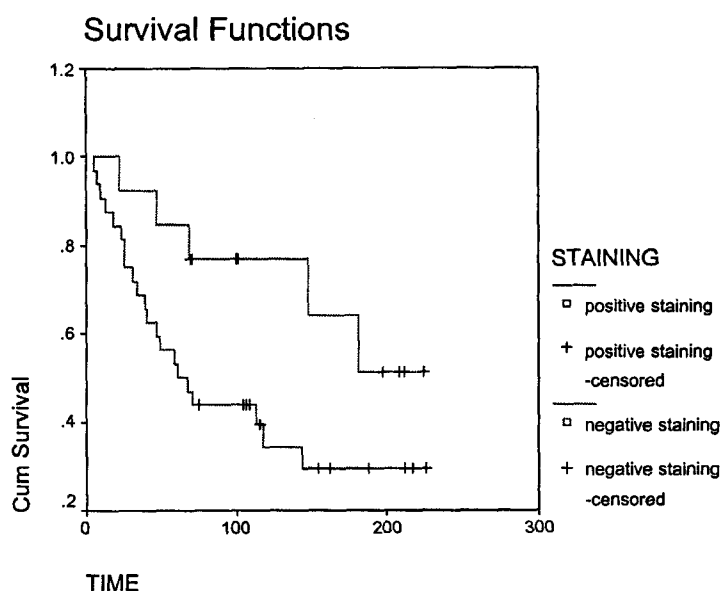
...7/-

- (i)  $S_1(t) = S_0(\varphi t)$   
(ii)  $f_1(t) = \varphi f_0(\varphi t)$   
(iii)  $h_1(t) = \varphi h_0(\varphi t)$

[30 markah]

(c) Satu kajian telah dijalankan untuk mengkaji sama ada pengesanan HPA boleh digunakan untuk meramal pengalaman hidup wanita yang mempunyai barah payudara. Masa hayat ( dalam bulan ) wanita yang mempunyai ketumbuhan yang dikesan sebagai positif atau negatif telah di rekod.

- (i) Fungsi survival bagi kedua-dua kumpulan yang dikesan sebagai positif dan dikesan sebagai negatif dan jadual ujian log – rank diberikan di bawah. Gunakan maklumat ini untuk menguji sama ada terdapat perbezaan pengalaman hidup diantara kedua-dua kumpulan wanita ini. Tuliskan kesimpulan anda.



Log Rank Statistic	df	Significance
3.51	1	0.0608

- (ii) Keputusan proses pengesanan boleh dianggap sebagai satu faktor dengan dua aras dan satu model bahaya berkadaran telah disuaikan. Output dari SPSS berikut memberi nilai anggaran nisbah bahaya kematian pada masa t bagi wanita yang dikesan positif terhadap wanita yang dikesan negative. Tuliskan kesimpulan anda. Bandingkan kesimpulan ini dengan kesimpulan di bahagian (i).

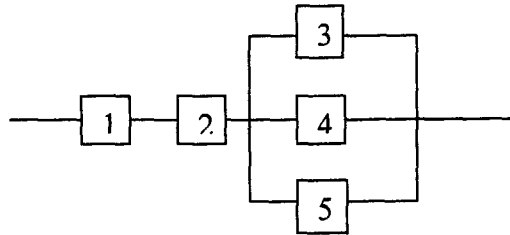
[30 markah]

...8/-

Variables in the Equation

	B	SE	Wald	df	Sig.	Exp(B)
STAINING	.908	.501	3.286	1	.070	2.479

4. (a) Consider the following system:



- (i) Find the minimal path sets for this system.
- (ii) Obtain the system reliability if  $P(\text{ith component is functioning}) = p, \quad i = 1, \dots, 5.$
- (iii) One of the path sets is  $\{1, 2, 3, 5\}$ . Show that this path set is not a minimal path set.

[30 marks]

- (b) An electronic unit consists of two components,  $C_1$  and  $C_2$ , arranged in parallel. Suppose that  $T_1$  denotes the lifetime of  $C_1$  and  $T_2$  denotes the lifetime of  $C_2$ . Assume that  $T_1$  and  $T_2$  are independent.
- (i) If  $T_1, T_2$  are identically distributed as the  $\exp(\lambda)$  random variables, determine the probability density function of the lifetime of the unit.
  - (ii) If  $T_i \sim \exp(\lambda_i), \quad i = 1, 2$ , determine the probability density function of the lifetime of the unit.
  - (iii) If  $T_1, T_2$  are identically distributed as the  $\exp(\lambda)$  random variables and two such units are connected in series, determine the probability density function of the lifetime of the resulting system.

[40 marks]

- (c) Suppose that  $n$  components have independent lifetimes  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Suppose that  $S_i(t)$ , the survival function for the  $i$ th component, is given by

$$S_i(t) = e^{-(\lambda t)^2}$$

- (i) If the components are linked in series, determine the survival function and hazard function for the system.
- (ii) Give the probability density function for the lifetime of the series system in (i). Identify the parameters of the distribution.

[30 marks]

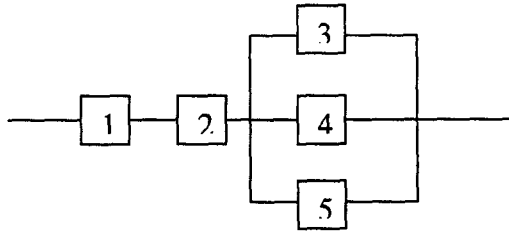
...9/-



## Variables in the Equation

	B	SE	Wald	df	Sig.	Exp(B)
STAINING	.908	.501	3.286	1	.070	2.479

4. (a) Pertimbangkan sistem berikut:



- (i) Dapatkan set laluan minimal bagi sistem ini.  
(ii) Dapatkan reliabiliti sistem jika  
 $P$  (komponen ke- $i$  berfungsi) =  $p$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .  
(iii) Salah satu daripada set laluan ialah  $\{1, 2, 3, 5\}$ . Tunjukkan bahawa set laluan ini bukan satu set laluan minimal.

[30 markah]

- (b) Sebuah unit elektronik mempunyai dua komponen,  $C_1$  dan  $C_2$ , disusun secara selari. Andaikan bahawa  $T_1$  menandakan masa hayat  $C_1$  dan  $T_2$  menandakan masa hayat  $C_2$ . Anggapkan bahawa  $T_1$  dan  $T_2$  adalah tak bersandar.

- (i) Jika  $T_1, T_2$  adalah pembolehubah rawak yang tertabur secara secaman dengan taburan  $\exp(\lambda)$ , tentukan fungsi ketumpatan kebarangkalian masa hayat unit tersebut.  
(ii) Jika  $T_i \sim \exp(\lambda_i)$ ,  $i=1, 2$ , tentukan fungsi ketumpatan kebarangkalian masa hayat unit tersebut.  
(iii) Jika  $T_1, T_2$  adalah pembolehubah rawak yang tertabur secara secaman dengan taburan  $\exp(\lambda)$  dan dua unit tersebut di hubung secara bersiri, tentukan fungsi ketumpatan kebarangkalian masa hayat sistem yang dihasilkan.

[40 markah]

- (c) Andaikan bahawa  $n$  komponen mempunyai masa hayat tak bersandar  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Andaikan bahawa  $S_i(t)$ , fungsi survival bagi komponen ke- $i$ , diberikan oleh

$$S_i(t) = e^{-(\lambda t)^2}$$

- (i) Jika komponen dihubung secara bersiri, tentukan fungsi survival dan fungsi bahaya bagi sistem tersebut.  
(ii) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian masa hayat sistem bersiri dalam bahagian (i). Camkan parameter taburan tersebut.

[30 markah]