

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
Academic Session 2007/2008

October/November 2007

**MGM 511 – Linear Algebra**  
**[Aljabar Linear]**

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all five** [5] questions.

**Arahan:** Jawab **semua lima** [5] soalan.]

...2/-



1. (a) Tentusahkan bahawa pemetaan  $L$  dari  $\mathbb{R}^3$  ke  $\mathbb{R}^3$  ialah suatu transformasi linear sekiranya  $L$  diberi sebagai  $L(x) = (2x_3, x_2 + 3x_1, 2x_1 - x_3)^T$  di mana  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ . Tentukan perwakilan matriks biasa  $A$  bagi  $L$ . Gunakan  $A$  untuk mencari  $L(x)$  bagi setiap vektor  $x$  yang berikut:

(i)  $x = (1, 1, 1)^T$ ,

(ii)  $x = (2, 1, 1)^T$ .

- (b) Jika  $L$  suatu operator linear yang memetakan  $\mathbb{R}^3$  ke  $\mathbb{R}^3$  di mana  $L(x) = Ax$  dengan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) cari matriks perwakilan  $B$  bagi  $L$  berbanding asas

$$v_1 = (1, 1, 1)^T, \quad v_2 = (1, 2, 0)^T, \quad v_3 = (0, -2, 1)^T,$$

- (ii) cari matriks transisi  $S$  yang berkaitan dengan penukaran asas dari  $[v_1, v_2, v_3]$  ke  $[e_1, e_2, e_3]$  dan tentusahkan bahawa  $B = S^{-1}AS$ .

[20 markah]

2. Tentukan suatu asas bagi setiap subruang  $R(A^T)$ ,  $N(A)$ ,  $R(A)$ ,  $N(A^T)$  di mana  $R(A)$  merupakan julat bagi matriks  $A$  dan  $N(A)$  ialah ruang nol bagi  $A$ , diberi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[20 markah]

3. (a) Takrifkan komplement ortogonal  $Y^\perp$  bagi suatu subruang  $Y$  bagi  $\mathbb{R}^n$ . Jika  $S$  merupakan subruang  $\mathbb{R}^4$  yang direntang oleh  $x_1 = (1, 0, -2, 1)^T$  dan  $x_2 = (0, 1, 3, -2)^T$ , cari suatu asas bagi  $S^\perp$ .

- (b) Takrifkan ruang hasil darab terkedalam. Buktikan keputusan berikut bagi sebarang  $u$  dan  $v$  dalam ruang hasil darab terkedalam  $V$ :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Berikan tafsiran geometri bagi keputusan ini untuk ruang vektor  $\mathbb{R}^2$ .

[20 markah]

...4/-

4. Using the Gram-Schmidt process, find an orthonormal basis for the column space of the following matrix  $A$  and factorize the matrix  $A$  into a product  $QR$  with the usual notations:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

[20 marks]

5. (a) Find the least squares solution to the system:

$$-x_1 + x_2 = 10, \quad 2x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 - 2x_2 = 20.$$

- (b) Define a generator matrix for a  $(n, m)$ -linear code  $C$  over a field  $A$ . Verify that the matrix given below is a generator matrix for the triple check code:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[20 marks]

...5/-

4. Gunakan proses Gram-Schmidt untuk mencari suatu asas ortornormal bagi ruang lajur bagi matriks  $A$  berikut, dan seterusnya tuliskan matriks  $A$  sebagai hasil darab  $QR$  dengan notasi biasa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

[20 markah]

5. (a) Cari penyelesaian kuasa dua terkecil bagi sistem:

$$-x_1 + x_2 = 10, \quad 2x_1 + x_2 = 5, \quad x_1 - 2x_2 = 20.$$

- (b) Takrifkan matriks penjana bagi suatu kod linear- $(n, m)$   $C$  pada suatu medan  $A$ . Tentusahkan bahawa matriks berikut merupakan suatu matriks penjana bagi kod semakan berganda tiga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[20 markah]

- 000 O 000 -