
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2007/2008

October/November 2007

MSG 327 – Mathematical Modelling
[Pemodelan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

...2/-

1. (a) Consider a small tank of uniformly mixed water containing initial BOD ℓ_0 mg/L and initial DO c_0 mg/L. Describe in your own word what will happen to the BOD and DO in this tank. You may use differential equations, analytical solutions, figures, diagrams and tables for illustration. You should consider the case with and without reaeration, with and without BOD input. All symbols used must be defined with proper dimensions and units. Your answer should not exceed two full written pages. You may want to consider providing good realistic examples to clarify your explanation.
- (b) Consider a small uniformly mixed lake with initial BOD ℓ_0 mg/L and initial DO c_0 mg/L. Assume that the BOD remains constant at ℓ_0 mg/L. BOD decay rate is α s⁻¹, reaeration is β s⁻¹ and oxygen saturation is c_s mg/L. Then the equation for DO c mg/L is given by

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\ell_0 + \beta(c_s - c), \quad c(0) = c_0 \quad (1)$$

Explain the terms used in Equation (1).

Sketch the solutions for Equation (1) without solving.

Solve Equation (1) for $t \in [0, \infty)$.

Assume the following values: $\alpha = 0.45$ per day, $\beta = 0.90$ per day, $\ell_0 = 10$ mg/L, $c_0 = 5.0$ mg/L, $c_s = 7.8$ mg/L. Provide the solution to Equation (1) with this set of values. Plot the curve for $t \in [0, \infty)$.

- (c) In the presence of photosynthesis, Equation (1) may be modified to the following.

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\ell_0 + \beta(c_s - c) + \delta \sin(\sigma t), \quad c(0) = c_0. \quad (2)$$

Explain the terms used in Equation (2).

Sketch the solutions for Equation (2) without solving.

Solve Equation (2) for $t \in [0, \infty)$.

Assume that $\sigma = 2\pi$ per day and $\delta = 15$ mg/L/day. Provide the solution for Equation (2) with the parameter values given in (b) and (c) above.

- (d) Consider a uniform river with constant velocity u m/s and diffusion E m²/s. A sewage outfall releases BOD into this river at $x = 0$ m. Write the partial differential equation for BOD and DO for this river using the symbols in (a), (b) and (c) above. Sketch the curve for BOD and DO for this river after steady state is achieved. You may use the answer obtained above. Relate the concept of distance traveled to time traveled in your answer.

[100 marks]

...3/-

1. (a) Anggapkan satu tangki kecil dengan percampuran lengkap yang mengandungi BOD awal ℓ_0 mg/L dan DO awal c_0 mg/L. Terangkan dengan perkataan sendiri apa akan terjadi kepada BOD dan DO dalam tangki ini. Anda boleh menggunakan persamaan pembezaan, penyelesaian analisis, rajah, diagram, dan jadual untuk penjelasan. Anda patut mempertimbangkan kes dengan dan tanpa pengudaraan semula, dengan dan tanpa input BOD. Semua simbol yang digunakan mesti ditakrifkan dengan dimensi dan unit yang sesuai. Jawapan anda tidak patut melebihi dua mukasurat penuh. Anda mungkin mahu memberikan contoh baik dan realistik untuk penjelasan lanjut.
- (b) Anggapkan satu tasik dengan percampuran lengkap dengan BOD awal ℓ_0 mg/L dan DO awal c_0 mg/L. Anggapkan BOD kekal pada nilai malar ℓ_0 mg/L. Kadar reputan BOD ialah α s⁻¹, kadar pengudaraan semula ialah β s⁻¹ and tahap oksigen tepu ialah c_s mg/L. Maka, persamaan bagi DO c mg/L diberikan sebagai

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\ell_0 + \beta(c_s - c), \quad c(0) = c_0 \quad (1)$$

Jelaskan sebutan yang digunakan di Persamaan (1).

Lakarkan penyelesaian bagi Persamaan (1) tanpa menyelesaikannya.

Selesaikan Persamaan (1) untuk $t \in [0, \infty)$.

Anggapkan nilai-nilai berikut: $\alpha = 0.45$ sehari, $\beta = 0.90$ sehari, $\ell_0 = 10$ mg/L, $c_0 = 5.0$ mg/L, $c_s = 7.8$ mg/L. Berikan penyelesaian bagi Persamaan (1) dengan menggunakan nilai yang diberikan di atas. Plotkan graf untuk $t \in [0, \infty)$.

- (c) Dengan fotosintesis, Persamaan (1) boleh diubahsuai kepada persamaan berikut.

$$\frac{dc}{dt} = -\alpha\ell_0 + \beta(c_s - c) + \delta \sin(\sigma t), \quad c(0) = c_0. \quad (2)$$

Jelaskan sebutan yang digunakan di Persamaan (2).

Lakarkan penyelesaian bagi Persamaan (2) tanpa menyelesaikannya.

Selesaikan Persamaan (2) untuk $t \in [0, \infty)$.

Anggapkan bahawa $\sigma = 2\pi$ sehari and $\delta = 15$ mg/L/hari. Berikan penyelesaian untuk Persamaan (2) dengan nilai-nilai parameter seperti yang diberikan di (b) dan (c) di atas.

- (d) Anggapkan satu sungai seragam dengan kelajuan malar u m/s dan sebaran E m²/s. Satu loji pelepasan pembetungan melepaskan BOD ke dalam sungai ini pada $x = 0$ m. Tulis persamaan pembezaan separa untuk BOD dan DO bagi sungai ini dengan menggunakan simbol-simbol yang diberikan di (a), (b) dan (c) di atas. Lakarkan graf BOD dan DO bagi sungai ini selapas keadaan mantap tercapai. Anda boleh gunakan jawapan yang diperolehi di atas. Bincangkan konsep jarak dan masa perjalanan dalam jawapan anda.

[100 markah]

...4/-

2. (a) Assume the basic units of m and s. A simple model for tide based upon the shallow water equations is

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

for a uniform channel with u = water velocity and η = water elevation above mean sea level. Derive these equations. Explain clearly the appropriate assumptions for the above model as well as the meaning and unit of g and h .

Show that the water elevation η satisfies the one-dimensional wave equation $\omega_{tt} = c^2(\omega_{xx})$. Find the dimension, unit and value of c .

(b) Verify that
$$\eta = a \sin(\sigma t - kx) \quad (5)$$

$$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(\sigma t - kx) \quad (6)$$

is a solution with $\sigma^2 = gh k^2$. What is the meaning and unit of σ and k ? Suggest other solutions for (3) and (4).

- (c) A uniform channel is open to a tide of 12-hour period at both ends. Let mean depth = 10 m and $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Find and sketch η and u in the same figure if the tidal amplitude is 1.0 m. What is the frequency and wavelength of this tide?

- (d) If the linear friction is considered, then the momentum equation (3) is modified to the following equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \gamma u = 0. \quad (7)$$

Assuming that $\gamma = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ and the values in (c) are retained, sketch the solution for u and η in the same figure.

- (e) A tsunami can be modeled by the shallow water equations. Use the concept developed in (a) to derive the partial differential equation in two dimensions for a tsunami and explain the appropriate assumptions made. Use η = water elevation, u = velocity in x -direction and v = velocity in y -direction. Clearly define all symbols used. Show that water elevation η satisfies the two-dimensional wave equation. Explain clearly the meaning of celerity and give the dimension and unit. Based upon the concept developed in (b), obtain the solution η , u and v for a two-dimensional tsunami. Derive the mathematical relationship between frequency and wavelength of a tsunami.

[100 marks]

...5/-

2. (a) Andaikan unit asas ialah m dan s . Satu model ringkas untuk pasang-surut berasaskan persamaan air cetek ialah

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

bagi suatu saluran seragam dengan u = halaju air dan η = paras air atas paras purata. Terbitkan persamaan ini. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas serta maksud dan unit g dan h .

Tunjukkan bahawa paras air η memenuhi persamaan gelombang satu dimensi $\omega_{\eta} = c^2(\omega_{xx})$. Cari dimensi, unit dan nilai c .

(b) Sahkan bahawa $\eta = a \sin(\sigma t - kx)$ (5)

$$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(\sigma t - kx) \quad (6)$$

ialah suatu penyelesaian dengan $\sigma^2 = ghk^2$. Apakah maksud dan unit bagi σ dan k ? Cadangkan penyelesaian-penyelesaian lain untuk (3) dan (4).

- (c) Suatu saluran seragam adalah terbuka kepada pasang surut berkalaan 12.00 jam pada kedua-dua hujung. Biarkan dalaman purata = 10 m dan $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Dapatkan dan lakarkan η dan u pada rajah yang sama jika amplitud pasang surut ialah 1.0 m. Apakah frekuensi dan panjang gelombang pasang surut ini?
- (d) Jika geseran linear diambil kira, maka persamaan momentum (3) diubahsuai kepada persamaan berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \gamma u = 0. \quad (7)$$

Andaikan $\gamma = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dan nilai yang terdapat pada (c) dikekalkan, lakarkan penyelesaian untuk u dan η pada rajah yang sama.

- (e) Satu tsunami boleh dimodelkan dengan persamaan air cetek. Gunakan konsep di (a) untuk menerbitkan persamaan pembezaan separa dua dimensi untuk satu tsunami dan terangkan anggapan yang sesuai digunakan. Guna η = paras air, u = halaju arah paksi x and v = halaju arah paksi y . Takrifkan dengan jelas semua simbol yang digunakan. Tunjukkan bahawa paras air η memenuhi persamaan gelombang dua dimensi. Terangkan dengan jelas maksud celeriti gelombang dan berikan dimensi dan unitnya. Dengan berpandukan konsep di (b), dapatkan penyelesaian η , u and v untuk satu model tsunami dua dimensi. Terbitkan hubungan matematik di antara frekuensi dan panjang gelombang tsunami.

[100 markah]

...6/-

3. (a) Explain the meaning of solid boundary and radiation boundary. A tsunami occurs in the middle of Pacific Ocean. Consider a circular area with a radius of 2160 km, centered at (0,0) km. Assume a depth of 1000 m and gravity of 10 m/s^2 . The initial tsunami occurs at time $t = 0 \text{ s}$ in the form of a small uniform circle centered at (0,0) with amplitude 10 m and zero initial velocity. Determine the value of wave celerity c . Sketch the location of this tsunami after 1 hour, 3 hours, 5 hours and 7 hours under two conditions: (a) solid boundary and (b) radiation boundary.
- (b) (i) Derive the partial differential equation to describe the distribution of a single pollutant in a uniform river. Use E for dispersion, u for velocity and k for decay rate and W for loading. Define the units for each term used.
- (ii) Consider steady state is achieved. Assume that the uniform flow of the river is $Q \text{ m}^3/\text{s}$ and a single uniform loading rate is $W \text{ kgs}^{-1}$ at $x = 0 \text{ km}$. Derive the complete solution for the concentration distribution $c(x)$ for $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iii) Assume that $E = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.2 \text{ m/s}$, $Q = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ and $W = 0.50 \text{ kgs}^{-1}$ at $x = 0 \text{ km}$. Find and sketch $c(x)$ for $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Suppose now that a second loading occurs at $x = 10 \text{ km}$ with $W = 1.0 \text{ kgs}^{-1}$. Sketch the concentration profile for this situation.
- (c) Based upon the above considerations in (b) (iii), find the concentration by numerical method using finite segment with 3 segments, each of 1000 m. Your solution must provide the concentration at both upstream and downstream segments of the discharge point. Sketch a simple diagram to illustrate your solution setup. Explain with a diagram why the solution in (b) and (c) differ slightly.

[100 marks]

...7/-

3. (a) Terangkan maksud bagi sempadan pejal dan sempadan radiasi. Satu tsunami berlaku di pertengahan Lautan Pasifik. Pertimbangkan satu kawasan bulatan dengan jejari 2160 km, berpusat pada (0,0) km. Anggapkan kedalaman 1000 m dan gravity $g = 10 \text{ m/s}^2$. Tsunami awal berlaku pada masa $t = 0 \text{ s}$ dalam bentuk bulatan seragam kecil berpusat pada (0,0) dengan tinggi 10 m dan halaju awal sifar. Tentukan nilai seleriti gelombang c . Lakarkan kedudukan tsunami ini selepas 1 jam, 3 jam, 5 jam dan 7 jam tertakluk kepada dua syarat: (a) sempadan pejal dan (b) sempadan radiasi.
- (b) (i) Terbitkan persamaan pembezaan separa untuk taburan satu bahan pencemar di dalam satu sungai seragam. Guna E untuk sebaran, u untuk halaju dan k untuk kadar reputan dan W untuk pelepasan. Takrifkan unit untuk setiap sebutan yang digunakan.
- (ii) Pertimbangkan keadaan mantap tercapai. Anggapkan bahawa aliran seragam ialah $Q \text{ m}^3/\text{s}$ dan satu pelepasan malar $W \text{ kgs}^{-1}$ pada $x = 0 \text{ km}$. Terbitkan penyelesaian lengkap bagi taburan konsentrasi $c(x)$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iii) Anggapkan $E = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.2 \text{ m/s}$, $Q = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dan $W = 0.50 \text{ kgs}^{-1}$ pada $x = 0 \text{ km}$. Cari dan lakarkan $c(x)$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Andaikan sekarang terdapat satu lagi punca pelepasan pada $x = 10 \text{ km}$ dengan kadar $W = 1.0 \text{ kgs}^{-1}$. Lakarkan profil konsentrasi bagi keadaan sekarang.
- (c) Dengan berpandukan (b) (iii), cari konsentrasi dengan menggunakan kaedah berangka dengan menggunakan segmen terhingga dengan 3 segmen, setiap satunya 1000 m. Penyelesaian anda mesti memberikan konsentrasi segmen di hulu dan hilir titik punca pelepasan. Lakarkan satu diagram untuk mengillustrasikan penyelesaian anda. Terangkan dengan menggunakan diagram kenapa penyelesaian di (b) dan (c) berbeza sedikit.

[100 markah]

- 000 O 000 -