
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2007/2008

October/November 2007

MAT 222 – Differential Equations II
[Persamaan Pembezaan II]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

...2/-

1. Consider the differential equation below where $y = y(x)$:

$$2y'' - 5y' - 3y = 0.$$

- (i) Write the equation above as a system of first order differential equations in two variables.
- (ii) Obtain the matrix equation for the above system of equations.
- (iii) Hence, or otherwise, solve the given differential equation using the initial conditions $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
- (iv) Verify the answer you obtained in (iii) by substituting it into the given differential equation.

[100 marks]

2. Consider the first order partial differential equation $u_x - u_y = 2e^{x+y} \sin 2y - 2x$ where $u = u(x, y)$.

- (a) Suppose $\hat{u}(x, y)$ is a particular solution for the equation above. Consider now the three possible choices for $\hat{u}_x$ below and obtain a suitable expression for $\hat{u}_y$ in each case. Determine which choice produces a particular solution for the differential equation:
 - (i) $\hat{u}_x = 2e^{x+y} \sin 2y$
 - (ii) $\hat{u}_x = -2x$
 - (iii) $\hat{u}_x = e^{x+y} \cos 2y - 2x$
- (b) Hence, or otherwise, solve the given partial differential equation using the initial condition $u(x, 0) = e^x + 3 \sin x - x^2$.

[100 marks]

...3/-

1. Pertimbangkan persamaan pembezaan berikut di mana $y = y(x)$:

$$2y'' - 5y' - 3y = 0.$$

- (i) Tuliskan persamaan di atas sebagai suatu sistem persamaan pembezaan peringkat pertama dalam dua pembolehubah.
- (ii) Dapatkan persamaan matriks bagi sistem persamaan di atas.
- (iii) Dengan itu, atau dengan cara lain, selesaikan persamaan pembezaan yang diberi dengan menggunakan syarat awal $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- (iv) Tentusahkan jawapan yang anda peroleh di (iii) dengan menggantikannya ke dalam persamaan pembezaan yang diberi.

[100 markah]

2. Pertimbangkan persamaan pembezaan separa peringkat pertama $u_x - u_y = 2e^{x+y} \sin 2y - 2x$ di mana $u = u(x, y)$.

- (a) Katakan $\hat{u}(x, y)$ merupakan suatu penyelesaian khusus bagi persamaan di atas. Pertimbangkan ketiga-tiga pilihan yang mungkin bagi $\hat{u}_x$ seperti di bawah dan dapatkan suatu ungkapan yang mungkin untuk $\hat{u}_y$ dalam setiap kes. Tentukan pilihan yang mana dapat menghasilkan suatu penyelesaian khusus bagi persamaan pembezaan yang diberi:
 - (i) $\hat{u}_x = 2e^{x+y} \sin 2y$
 - (ii) $\hat{u}_x = -2x$
 - (iii) $\hat{u}_x = e^{x+y} \cos 2y - 2x$
- (b) Dengan itu, atau dengan cara lain, selesaikan persamaan pembezaan separa di atas dengan menggunakan syarat awal $u(x, 0) = e^x + 3 \sin x - x^2$.

[100 markah]

...4/-

3. Consider the function below:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ for } a < x < \pi \text{ with } f(x + 2\pi) = f(x).$$

- (a) Given $a = -\pi$, find the Fourier series for $f(x)$.
- (b) Given $a = 0$, find the Fourier Cosine series for $f(x)$.
- (c) Given $a = 0$, find the Fourier Sine series for $f(x)$.
- (d) Compare the value of $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ as determined by each of the three series above.

[100 marks]

4. (a) Solve the following heat equation for $v = v(x, t)$:

$$v_t = kv_{xx}, 0 < x < l, t > 0,$$

given the initial conditions:

$$v(x, 0) = f(x), 0 < x < l, \text{ and}$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, t > 0.$$

(b) Consider the heat equation below for $u = u(x, t)$:

$$u_t = u_{xx} + 1, 0 < x < \pi, t > 0,$$

with the initial conditions:

$$u(x, 0) = x(\pi - x), 0 < x < \pi, \text{ and}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t > 0.$$

- (i) Find a quadratic function $g(x)$, and suitable values for k and l such that the substitution $u(x, t) = v(x, t) + g(x)$ would transform this equation to the form in part (a).
- (ii) Hence, or otherwise, solve this equation.

[100 marks]

...5/-

3. Pertimbangkan fungsi berikut:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ bagi } a < x < \pi \text{ dengan } f(x + 2\pi) = f(x).$$

- (a) Diberi $a = -\pi$, cari siri Fourier bagi $f(x)$.
- (b) Diberi $a = 0$, cari siri Kosinus Fourier bagi $f(x)$.
- (c) Diberi $a = 0$, cari siri Sinus Fourier bagi $f(x)$.
- (d) Bandingkan nilai-nilai $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ seperti yang ditentukan oleh setiap daripada tiga siri di atas.

[100 markah]

4. (a) Selesaikan persamaan haba berikut bagi $v = v(x, t)$:

$$v_t = kv_{xx}, 0 < x < l, t > 0,$$

diberikan syarat awal:

$$v(x, 0) = f(x), 0 < x < l, \text{ dan}$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, t > 0.$$

(b) Pertimbangkan persamaan haba berikut bagi $u = u(x, t)$:

$$u_t = u_{xx} + 1, 0 < x < \pi, t > 0,$$

dengan syarat awal:

$$u(x, 0) = x(\pi - x), 0 < x < \pi, \text{ dan}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t > 0.$$

- (i) Cari suatu fungsi kuadratik $g(x)$, dan nilai-nilai yang sesuai bagi k dan l supaya gantian $u(x, t) = v(x, t) + g(x)$ dapat mengubah bentuk persamaan ini kepada bentuk persamaan dalam (a).
- (ii) Dengan itu, atau dengan cara lain, selesaikan persamaan ini.

[100 markah]

- 000 O 000 -