UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang Akademik 1989/90

Jun 1990

EUM 202 - Matematik Kejuruteraan IV

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 10 muka surat bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

...2/-

1. Takrif bagi jelmaan Laplace $L\{f(t) ; s\}$ ialah

$$L\{f(t) ; s\} = \int_0^\infty f(t) \exp(-st)\, dt ,$$

yang mana s ialah parameter nyata.

(a) (i) Tunjukkan bahawa

$$L\{t^r ; s\} = \frac{G(r+1)}{s^{r+1}} \text{ bagi } s > 0 ,$$

yang mana r ialah pemalar nyata yang lebih besar daripada -1 dan G (r) ialah fungsi gamma yang ditakrif sebagai

$$G(r+1) = \int_0^\infty x^r \exp(-x)\, dx .$$

Terangkan mengapa kita perlu syarat $r > -1$.

(20%)

(ii) Dengan menggunakan pengkamiran bahagian demi bahagian, buktikan.

$$G(r+1) = rG(r).$$

Jikalau $G\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ cari nilai $G\left(\frac{3}{2}\right)$.

(20%)

...3/-

(iii) Jikalau $L\{ f(t) ; s \} = \frac{s + 4}{s^{3/2}}$ bagi $s > 0$

cari $f(t)$ (bagi $t > 0$).

(20%)

(b) Diberi $L \{ f(t) ; s \} = \dfrac{s^2}{(s^2 + 1)^2}$ bagi $s > 0$,

cari $f(t)$ (bagi $t \geq 0$).

(Petunjuk : $L \{ \cos(wt) ; s \} = \dfrac{s}{s^2 + w^2}$ bagi $s > 0$

dan $L \{ \int_0^t f(u) \; g(t - u) \, du ; s \} = L \{ f(t) ; s \} \; L\{g(t) ; s \}$

(iaitu teorem konvolusi).)

(20%)

(c) Cari $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ ($t > 0$) dengan menggunakan jelmaan Laplace jikalau diberi

$$2x(t) - y(t) - y'(t) = 4(1 - \exp(-t))$$

$$2x'(t) + y(t) = 2(1 + 3\exp(-2t))$$

dan $x(0) = y(0) = 0$.

...4/-

(Petunjuk: $L\{\exp(at)\,;\,s\} = \frac{1}{s-a}$,

$$L\{\sin(wt)\,;\,s\} = \frac{w}{s^2+w^2},\quad L\{\cos(wt)\,;\,s\} = \frac{s}{s^2+w^2},$$

$$L\{\exp(at)\,f(t)\,;\,s\} = L\{f(t)\,;\,s-a\}\,,\ \text{dan}$$

$$L\{f'(t)\,;\,s\} = sL\{f(t)\,;\,s\} - f(0).)$$

(20%)

2. Takrif bagi jelmaan Fourier sinus dan kosinus ialah

$$F_s\{f(x)\,;\,\lambda\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\,\sin(\lambda x)\,dx$$

$$F_c\{f(x)\,;\,\lambda\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx.$$

Anda boleh guna keputusan berikut:

$$F_s\{f(x)\,;\,\lambda\} = g(\lambda) \Leftrightarrow F_s\{g(\lambda)\,;\,x\} = f(x)$$

$$F_c\{f(x)\,;\,\lambda\} = g(\lambda) \Leftrightarrow F_c\{g(\lambda)\,;\,x\} = f(x).$$

...5/-

(a) Selesaikan setiap persamaan kamiran berikut untuk mendapat f(x) (bagi x > 0):

(i) $$\int_0^\infty f(x)\sin(\lambda x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ bagi } 0 \le \lambda \le \pi, \\ \sin(\lambda) \text{ bagi } \pi < \lambda \le 2\pi, \\ 0 \text{ bagi } \lambda > 2\pi, \end{cases}$$

(ii) $$\int_0^\infty f(x)\cos(\lambda x)\,dx = \exp(-\lambda),\ \lambda \ge 0.$$

(20%)

(b) Jikalau

$$F_e\{f(x);\lambda\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\lambda x)\,dx$$

yang mana λ ialah pemalar nyata,

tunjukkan bahawa

$$F_c\{f(x);\lambda\} = F_c\{h(x);\lambda\} - iF_s\{g(x);\lambda\}$$

yang mana $2h(x) = f(x) + f(-x)$ dan

$2g(x) = f(x) - f(-x)$.

(<u>Petunjuk</u>: $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.)

Bagi jujukan f_n ($n = 0, 1, 2, 3, ...$) , kita takrif jelmaan - z .

$$Z\{ f_n ; z \} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n{}^{z-n}, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1} .$$

Anda boleh guna keputusan berikut:

(i) $$Z\{ f_n ; z \} = F(z) \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c Z^{n-1} F(z)\, dz .$$

(ii) $$Z\{ f_{n+k} ; z \} = z^k \left[Z\{ f_n ; z \} - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right], \quad k \geq 1.$$

(30%)

(c) Cari $Z\{ f_n ; z \}$ jikalau diberi

(i) $$f_n = \begin{cases} 0 & \text{jikalau } n \geq 0 \text{ genap,} \\ -1 & \text{jikalau } n \geq 0 \text{ ganjil ,} \end{cases}$$

(ii) $f_n = \exp(an)$ bagi $n \geq 0$,

(iii) $f_n = \cos h\,(an)\ \sin h\,(bn)$, bagi $n \geq 0$.

Bagi setiap kes di atas,
Nyatakan sebarang syarat yang diperlu untuk $Z\{ f_n ; z \}$ wujud .

...7/-

(Petunjuk: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z}$ bagi $|z| < 1$,

$2 \cos h (z) = \exp (z) + \exp (-z)$ dan $2 \sin h (z) = \exp (z) - \exp (-z)$.)

(30%)

(d) Guna jelmaan - z untuk menyelesaikan

$h_{n+2} + 3h_{n+1} - 2h_n = 0$

diberi $h_0 = 0$ dan $h_1 = 1$.

(20%)

3. (a) Ia adalah diketahui bahawa garis lurus $y = 95x - 26$ bertemu dengan lengkungan $y = x^4 - 19x^3 + 81x^2 - 1$ di titik (a, b).

(i) Tunjuk bahawa suatu nilai bagi a adalah terletak di antara 0 dan 1.

(10%)

(ii) Guna rumus Newton - Raphson

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Untuk mendapat nilai anggaran bagi a yang tepat kepada dua tempat perpuluhan. (Mula dengan $x_0 = 0.50$.)

(20%)

...8/-

(b) Dengan menghampirkan fungsi $f(x) = \exp(-x)$ dengan polinomial Taylor - Maclaurin yang berperingkat 3 , dapatkan suatu nilai anggaran bagi

$$\int_0^1 x^{3/2} \exp(-x)\, dx .$$

Berikan analisis ralat bagi nilai anggaran yang anda dapat itu.

(Petunjuk : Siri Taylor - Maclaurin bagi $g(x) = \exp(x)$ ialah $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.)

(20%)

(c) (i) Terangkan secara ringkas bagaimana konsep kebarangkalian (kaedah Monte-Carlo) boleh diguna untuk mendapat nilai anggaran bagi

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

(Andaikan bahawa $f(x) \geq 0$ bagi x $[a, b]$ dan $f(x)$ adalah selanjar dalam selang $[a, b]$.)

(20%)

...9/-

(ii) Kita pilih suatu titik (x, y), yang mana $0 \leqslant x \leqslant 1$ dan $0 \leqslant y \leqslant 1$, secara rawak (randomly) sebanyak sepuluh kali. Berikut ialah keputusan yang didapati:

(0.11 , 0.03), (0.72, 0.35), (0.35 , 0.61), (0.80, 0.91) , (0.41,0.37)

(0.49 , 0.82) , (0.27, 0.85), (0.68, 0.21), (0.31, 0.02) , (0.55, 0.74)

Guna keputusan ini dan kaedah Monte-Carlo untuk mendapat nilai anggaran bagi

$$\int_0^1 x^2 \, dx .$$

(10%)

(d) Bagi $1 \leqslant x \leqslant 2$, guna kaedah Runge-Kutta peringkat pertama untuk menyelesaikan secara hampiran persamaan pembezaan biasa

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + x^{-2}$$

diberi $y(1) = 1/2$.

(Bahagikan [1, 2] kepada lima subselang.)

Menurut penyelesaian hampiran anda, apakah nilah $y(3/2)$?.

(20%)

...10/-

4. (a) Cari nilai dan vektor eigen bagi setiap matriks berikut:

(i) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, θ ialah nombor nyata ,

(ii) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

(50%)

(b) Pertimbangkan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

(i) Tuliskan matriks A dalam bentuk PBP^{-1}, yang mana P ialah matriks 3 x 3 tertentu dan $B = [b_{ij}]$ ialah matriks 3 x 3 yang mempunyai unsur-unsur yang mana $b_{ij} = 0$ bagi $i \neq j$. (Cari P dan B).

(30%)

(ii) Guna jawapan anda di bahagian (b) (i) di atas untuk mencari A^{-1}.
(Petunjuk: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

(20%)

- oooOooo -