UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

EUM 331 - Kaedah Berangka

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 9 muka surat bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab (SEMUA) soalan.

Tunjuk semua kerja dengan jelas. Mesinkira boleh diguna.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

...2/-

1. (a) Nilai untuk fungsi g(x,y) pada titik tertentu ialah seperti berikut:

x \ y	2	4	6
1	-2	-14	-34
3	14	2	-18
5	46	34	14

(i) Hampirkan setiap fungsi $g(x, 2)$, $g(x, 4)$ dan $g(x, 6)$, $1 \leq x \leq 5$, dengan menggunakan polinomial interpolasi Lagrange atau Newton yang berperingkat 2 (dalam x). Kemudian, cari nilai hampiran untuk $g(2, 2)$, $g(2, 4)$ dan $g(2, 6)$.

(20%)

(ii) Gunakan nilai hampiran untuk $g(2, 2)$, $g(2, 4)$ dan $g(2, 6)$, yang anda dapat dalam bahagian (i), untuk menghampirkan fungsi $g(2, y)$, $2 \leq y \leq 6$, dengan polinomial interpolasi Lagrange atau Newton yang berperingkat 2 (dalam y). Kemudian, cari nilai hampiran untuk $g(2, 3)$.

(20%)

(iii) Jikalau $g(x, y)$ ialah fungsi polinomial yang berperingkat 2, cari fungsi $g(x, y)$.

(10%)

(b) Pertimbangkan masalah menghampirkan sesuatu fungsi $f(x)$ dalam selang $[a, b]$. Selang $[a, b]$ di bahagikan kepada n subselang $[x_o, x_1]$ $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., dan $[x_{n-1}, x_n]$; $x_o = a$ dan $x_n = b$.
Satu fungsi polinomial peringkat 2, iaitu $P_i(x)$, digunakan untuk menghampiri $f(x)$ dalam subselang $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

...3/-

Fungsi-fungsi $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ dikehendaki memenuhi syarat berikut:

(I) $P_j(x_{j-1}) = f_{j-1}$ dan $P_j(x_j) = f_j$
untuk $j = 1, 2, \dots, n$; $f(x_{j-1}) = f_{j-1}$
dan $f(x_j) = f_j$.

(II) $P_j'(x_{j-1}) = \ell_{j-1}$ dan $P_j'(x_j) = \ell_j$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$; $\ell_p\ (p = 0, 1, 2, \dots, n)$ ialah pemalar yang akan ditentukan.

(i) Terangkan mengapa syarat (I) dan (II) digunakan untuk memilih $P_i(x)$.

(10%)

(ii) Jikalau $P_i(x)$ dituliskan dalam bentuk
$$P_i(x) = \frac{1}{2}\alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i ,$$
(α_i, β_i dan γ_i ialah pemalar),
gunakan syarat (II) di atas untuk menunjukkan bahawa (untuk $j = 1, 2, \dots, n$)

$$\alpha_j = (\ell_j - \ell_{j-1})/h_j$$

$$\beta_j = (h_j \ell_{j-1} - x_{j-1}[\ell_j - \ell_{j-1}])/h_j \ ;$$

$$h_j = x_j - x_{j-1}.$$

(15%)

(iii) Guna bahagian b(ii) serta syarat (I) untuk menunjukkan bahawa (untuk $j = 1, 2, \dots, n$)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_j}{h_j} - x_{j-1}\right)\ell_j + \left(-\frac{1}{2}\frac{\omega_j}{h_j} + x_j\right)\ell_{j-1} = f_j - f_{j-1};$$

$$\omega_j = x_j^2 - x_{j-1}^2$$

(15%)

...4/-

(iv) Gunakan prosedur yang dihuraikan di atas untuk menghampirkan $f(x) = \sqrt{x}$ dalam selang [1, 9]. (Bahagikan [1, 9] kepada 2 subselang [1, 4] dan [4, 9]. Pilih $\ell_0 = 0$ dan guna bahagian b(iii) untuk dapat ℓ_1 dan ℓ_2. Kemudian, cari $P_1(x)$ dan $P_2(x)$.)

Cari nilai hampiran untuk $\sqrt{2}$.

(10%)

2. Pertimbangkan kamiran

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Kita ingin cari satu rumus hampiran untuk I (jika ia wujud) dalam bentuk

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) ;$$

A_i dan x_i (i = 1, 2) dipilih supaya rumus jadi tepat bagi fungsi $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^3$.

(a) Cari sistem persamaan yang mengandungi 4 persamaan dalam A_1, A_2, x_1 dan x_2. Tunjukkan bahawa satu penyelesaian untuk sistem persamaan itu ialah

$$A_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad A_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_1 = -\frac{1}{2}$$

(Petunjuk : Anda boleh guna keputusan (tanpa bukti):

$$\int x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x}{8}\left[2x^2 - 1\right]\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8} \arcsin (x) + c.)$$

(40%)

...5/-

(b) Guna bahagian (a) di atas untuk menilaikan secara hampiran

kamiran $J = \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\ (x^6 + x^3)\, dx.$

Jikalau ralat untuk rumus bagi I diberi oleh $R(\xi) = \pi f^{(4)}(\xi)/768$, $-1 < \xi < 1$, berikan satu analisis ralat untuk nilai hampiran bagi J yang anda dapat itu.

(25%)

(c) Nilaikan secara hampiran

$$L = \int_{-1}^{1} \left(\frac{\text{Sin}\,[5 \text{ arc } \cos(x)]}{\text{Sin}\,[\text{arc } \cos(x)]}\right)^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

dengan menggunakan

(i) rumus untuk I yang dibincangkan di atas,

(10%)

(ii) rumus trapezoid

$$\int_{x_o}^{x_3} f(x)\, dx \approx h\left[\frac{f_o}{2} + f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2}\right]$$

(10%)

(iii) rumus Simpson 3/8

$$\int_{x_o}^{x_3} f(x)\, dx \approx \frac{3h}{8}[f_o + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

(10%)

...6/-

Menurut buku "Handbook of Mathematical Functions" oleh Abramowitz dan Stegun, nilai bagi L ialah $\pi/2$. Beri ulasan tentang kejituan nilai hampiran yang anda dapat dalam (c)(i) - (iii) di atas.

(5%)

3. (a) Biar x_k jadi penghampiran ke - k bagi satu penyelesaian untuk persamaan $f(x) = 0$. Menurut kaedah Newton-Raphson,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad , \quad k = 1, 2, ...$$

(i) Tunjukkan bahawa garis lurus $y = x$ bersilang dengan lengkung $y = \cos(x)$ hanya pada satu titik sahaja.

(10%)

(ii) Guna kaedah Newton-Raphson untuk mendapat titik persilangan di antara $y = x$ dan $y = \cos(x)$ (secara hampiran). (Mula dengan $x_0 = 0.70000$. Berhenti apabila x_k dan x_{k+1} bersetuju kepada 4 tempat perpuluhan (t.p.). Dalam kerja anda, ambil semua nilai kepada sekurang-kurangnya 5 t.p.)

(20%)

(b) Biar x_k jadi seperti yang tertakrif dalam bahagian (a) di atas. Siri Taylor-Maclaurin untuk f(x) pada $x = x_k$ diberi oleh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_k)^n \frac{f^{(n)}(x_k)}{n!}$$

Untuk kaedah Newton-Raphson, x_{k+1} didapati dengan menyelesaikan $f(x) = 0$ apabila f(x) dihampiri menggunakan hanya sebutan pertama dan kedua dalam Siri Taylor-Maclaurin di atas. Tunjukkan ini.

(10%)

Jikalau fungsi f(x) dihampiri dengan menggunakan hanya sebutan pertama, kedua dan ketiga dalam Siri Taylor-Maclaurin di atas, tunjukkan bahawa

$$(*) \qquad x_{k+1} = x_k + \frac{\sqrt{[f'(x_k)]^2 - 2f(x_k)\, f''(x_k)} - f'(x_k)}{f''(x_k)} \; .$$

(Nota : Boleh terdapat sebanyak dua ungkapan untuk x_{k+1}. Terangkan mengapa hanya ungkapan yang diberi di atas dipilih sahaja.)

(30%)

Gunakan persamaan (*) di atas untuk mendapat satu nilai hampiran untuk koordinat x bagi titik persilangan di antara y = x dan y =cos(x). (Mula dengan $x_o = 0.70000$ dan kira x_1 dan x_2.).

(20%)

Bandingkan jawapan anda dengan yang terdapat dalam bahagian (a) (ii) di atas. (Beri ulasan.)

(10%)

4. Pertimbangkan masalah menyelesaikan
$y'(x) = f[x, y]$, $a \le x \le b$, $y(a) =$; f[x, y) ialah satu fungsi yang sesuai dan a, b dan ℓ ialah pemalar yang diberi.

Untuk satu penyelesaian secara hampiran bahagikan selang [a, b] kepada n subselang $[x_o, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ... dan $[x_{n-1}, x_n]$; $x_p = a + ph$ dan $h = [b - a]/n$.

Siri Taylor-Maclaurin untuk y(x) pada $x = x_p$ diberi oleh

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_p)^k \frac{f^{(k)}(x_p)}{k!} \; .$$

(a) Terangkan bagaimana siri di atas boleh digunakan untuk mendapat hubungan

$$y_{p+1} = y_p + h\,f(x_p, y_p) + \frac{1}{2}h^2\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(x_p,\, y_p)}$$

$$+\frac{1}{6}h^3\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x dy} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]_{(x_p,\, y_p)}$$

Huraikan secara ringkas bagaimana hubungan ini boleh digunakan untuk mendapat satu algoritma yang boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut di atas. Apakah satu ciri yang kurang memuaskan (jika ada) tentang algoritma yang dihuraikan itu?.

(30%)

(b) Gunakan algoritma yang anda huraikan dalam bahagian (a) di atas untuk menyelesaikan

$$y'(x) = 1 + x^3 - \frac{1}{5}y - \frac{3}{10}y^2,\ 0 \le x \le 1\ ,\ y(0) = 0\,.$$

(Bahagikan [0, 1] kepada 2 subselang yang mempunyai saiz yang sama.) Kira y (0.75) secara hampiran.

(30%)

(c) Satu cara berlainan untuk menyelesaikan masalah dalam bahagian (b) di atas ialah seperti berikut:-
Biar $P_2(x) = C_o + C_1x + C_2x^2$ jadi satu fungsi kuardratik, dan biar $E(x)$ ditakrifkan oleh $E(x) = 1 + x^3 - \frac{1}{5}P_2 - \frac{3}{10}P_2^2 - P_2'(x)$.

(i) Jikalau $P_2(x)$ digunakan untuk menghampiri $y(x)$ dalam bahagian (b) di atas, terangkan mengapa kita boleh ambil $c_o = 0$.

(10%)

(ii) Jikalau $c_0 = 0$, pekali C_1 dan C_2 boleh dipilih dengan 2 kaedah berlainan.

<u>Kaedah 1</u> Biar x_1 dan x_2 jadi dua titik dalam selang [0, 1]. Pekali C_1 dan C_2 dipilih supaya $E(x_1) = 0$ dan $E(x_2) = 0$.

<u>Kaedah 2</u> Pekali C_1 dan C_2 dipilih supaya

$$\int_0^1 E(x)\,dx = 0 \text{ dan } \int_0^1 (1 - x^2)\,E(x)\,dx = 0$$

Guna kaedah 1 dan 2 untuk memilih C_1 dan C_2. (Untuk kaedah 1, ambil $x_1 = 0.25$ dan $x_2 = 0.75$.) Hampirkan $y(x)$ (penyelesaian untuk masalah dalam bahagian (b)) dengan $P_2(x)$. Untuk setiap kaedah (1 dan 2), kira $y(0.75)$ secara hampiran. Bandingkan jawapan anda dengan jawapan untuk bahagian (b) di atas.

(30%)

- oooOooo -