
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester KSCP
Sidang Akademik 2004/2005

Mei 2005

ZCT 218/3 - Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua **LIMA** soalan. Kesemua soalan wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

- (1) Pertimbangkan fungsi berikut:

$$f(x) = \sinh(ax), \quad -\pi < x < \pi$$

- (a) Tentukan sama ada fungsi
- $f(x)$
- adalah fungsi genap atau ganjil atau bukan kedua-duanya.

(20/100)

- (b) Tunjukkan bahawa fungsi
- $f(x)$
- mempunyai siri Fourier bentuk kompleks yang boleh ditulis sebagai:

$$f(x) = \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in(-1)^n}{a^2 + n^2} e^{inx}$$

$$\text{Petunjuk: } \cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}, \quad \sinh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

(80/100)

- (2) (a) Tunjukkan:
- $L \{ e^{at} \cosh(bt) \} = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$

$$\text{Petunjuk: } \cosh(ax) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

(30/100)

- (b) Dengan menggunakan pecahan separa, tentukan songsangan transformasi Laplace bagi:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2 - 2s + 2)}$$

(40/100)

- (c) Selesaikan persamaan pembezaan yang berikut dengan menggunakan teknik transformasi Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Gunakan jawapan yang diperolehi dari (b).

(30/100)

...3/-

- (3) (a) Tunjukkan yang **transformasi cosine Fourier** bagi fungsi berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x); & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0; & x > 2\pi \end{cases}$$

boleh ditulis sebagai: $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega \sin(2\pi\omega)}{(\omega^2 - 1)}$

(60/100)

- (b) Takrifan kamiran tetap bagi **fungsi Gamma**, $\Gamma(z)$, diberikan sebagai:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \text{Re}(z) > 0$$

Dengan menggunakan takrifan ini, nilaikan kamiran berikut:

$$I = \int_0^{\infty} x^p \exp(-x^2) dx$$

dengan p sebagai pemalar.

(40/100)

- (4) Satu bar logam yang homogen dengan panjang l meter adalah seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1.



Rajah 1

Hujung-hujung logam dan permukaan luar di sepanjang bar logam dibalut dengan penekat haba supaya tiada haba hilang melalui hujung-hujungnya (merujuk kepada **syarat-syarat sempadan**).

Biarkan panjang bar $l = 1$ dan pemalar resapan haba $\alpha^2 = 1$. Jika suhu pada bar logam bersandar terhadap panjang x dan masa t sahaja,

- (a) Tuliskan **persamaan haba** satu dimensi bagi bar logam ini, menggunakan sistem koordinat Cartesian.

(10/100)

...4/-

(b) Tuliskan **syarat-syarat sempadan** bagi sistem ini. (10/100)

(c) Dengan kaedah pembolehubah terpisahkan, cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan dalam (a). (40/100)

(d) Diberi suhu awal bar logam tersebut adalah:

$$u(x,0) = f(x) = \cos(\pi x)$$

Dengan syarat-syarat sempadan dari (b) dan syarat awal ini, cari penyelesaian khusus bagi suhu di sepanjang bar logam itu.

(40/100)

(5) Pertimbangkan **persamaan Laplace** dua dimensi dalam sistem koordinat kutub:

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad (1)$$

dengan $u = u(r, \theta)$

$$0 \leq r < a; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(a) Dengan kaedah pembolehubah terpisahkan, cari penyelesaian am bagi persamaan Laplace (1). (50/100)

(b) Dengan syarat sempadan:

$$u(a, \theta) = \frac{1}{2}(\pi - \theta); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{syarat sempadan berkala:} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{dan:} \quad 0 \leq r < a$$

cari penyelesaian khusus bagi $u = u(r, \theta)$.

(50/100)

Lampiran

Jadual Transformasi Laplace

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$