
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2004/2005

Februari - Mac 2005

ZCT 218/3 - Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua **LIMA** soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Wakilkan fungsi yang berikut dengan siri Fourier bentuk kompleks:

$$f(x) = 2x + ix^2, \quad -\pi < x < \pi$$

(100/100)

2. (a) Tentukan transformasi Laplace bagi fungsi berikut:

$$f(t) = \sin^2(2t)$$

Petunjuk: Gunakan identiti trigonometri yang sesuai.

(20/100)

- (b) Tentukan songsangan transformasi Laplace bagi:

$$F(s) = \frac{s^2 - s + 1}{(s^2 - 2s + 2)(s^2 - s - 6)}$$

(45/100)

- (c) Selesaikan persamaan pembezaan yang berikut dengan menggunakan teknik transformasi Laplace:

$$y'' - y' - 6y = e^t \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Gunakan juga jawapan yang diperolehi dari (b).

(35/100)

3. (a) Tunjukkan yang transformasi Fourier bagi fungsi berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x); & |x| \leq \pi \\ 0; & |x| > \pi \end{cases}$$

boleh ditulis sebagai: $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \frac{\sin(\pi \omega)}{(\omega^2 - 1)}$

(60/100)

- (b) Pertimbangkan persamaan pembezaan yang berikut:

$$4x^2 y'' + 4x y' + (9x^3 - 36)y = 0; \quad z = x^{3/2} \quad (1)$$

- (i) Tuliskan bentuk am bagi persamaan pembezaan Bessel, dan nyatakan penyelesaian amnya dalam sebutan fungsi Bessel. (5/100)
- (ii) Dengan pembolehubah baru yang diberi, lakukan transformasi pembolehubah untuk menukarkan persamaan (1) kepada bentuk persamaan pembezaan Bessel. (25/100)
- (iii) Nyatakan penyelesaian am bagi persamaan dalam (ii) dalam sebutan fungsi Bessel. (5/100)
- (iv) Dari (iii), tuliskan pula penyelesaian am bagi persamaan pembezaan yang asal, yakni persamaan (1). (5/100)

4. Satu tali yang tidak kenyal diregangkan, dan hujung-hujungnya diikat dengan ketat pada dinding. Tali ini yang panjangnya adalah β , kemudiannya bergetar dengan memetik di tengahnya.

- (a) Tuliskan bentuk am persamaan gelombang satu dimensi bagi sesaran melintang sistem tali yang bergetar, dalam sistem koordinat Cartesian, $u(x, t)$. (10/100)
- (b) Nyatakan syarat-syarat sempadan bagi sistem tali yang dihuraikan di atas. (10/100)
- (c) Dengan kaedah pembolehubah terpisahkan, tentukan penyelesaian am bagi persamaan gelombang dalam (a). (30/100)
- (d) Dengan syarat-syarat sempadan dari (b) dan syarat-syarat awal yang diberikan di bawah, cari penyelesaian khusus bagi $u(x, t)$.

Syarat-syarat awal bagi sistem tali ini diberikan sebagai:

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq \frac{\beta}{2} \\ A(\beta - x), & \frac{\beta}{2} < x \leq \beta \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

(50/100)

5. Pertimbangkan persamaan pembezaan Laplace dalam segiempat $0 < x < a$, $0 < y < b$.

(a) Tuliskan bentuk am bagi persamaan Laplace dua dimensi dalam sistem koordinat Cartesian, $u(x,y)$

(10/100)

(b) Dengan kaedah pembolehubah terpisahkan, tentukan penyelesaian am bagi persamaan Laplace dalam (a).

(30/100)

(c) Dengan syarat-syarat sempadan yang diberikan di bawah, cari penyelesaian khusus bagi $u(x,y)$.

Syarat-syarat sempadan:

$$u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

$$u(x,b) = g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{a}{2} \\ a - x, & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

(60/100)

Lampiran

Jadual Transformasi Laplace

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$