UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

EUM 102 - Matematik Kejuruteraan II

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan kertas peperiksaan ini mengandungi **LAPAN (8) muka surat bercetak** dan **TUJUH (7) soalan** serta **DUA (2) Lampiran** sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Kertas ini mengandungi **3 bahagian** iaitu: **BAHAGIAN A**
BAHAGIAN B
BAHAGIAN C

Bagi Bahagian A : **Pilih 2 soalan.**
Bahagian B dan C : **Pilih satu soalan bagi setiap bahagian.**

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.
Mesinkira boleh digunakan.

.../2

BAHAGIAN A:

1. (a) Diberi tiga vektor $A = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 5k$, $B = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ dan $C = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$.
Tentukan,

(i) A.B ;
(ii) B x C; dan
(iii) A. (B x C).

(20%)

(b) Diberi matriks,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan,

(I) $|A|$
(ii) adj. A ; dan
(iii) A^{-1}

(20%)

(c) Dengan menggunakan kaedah matriks atau cara lain, selesaikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 6 \\ 3x - 2y - 2z &= 5 \\ 4x + 3y + z &= -5 \end{aligned}$$

(20%)

(d) Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen bagi matriks,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(40%)

.../3

2. (a)
Diberi $A = 2x^2y\,\bar{i} - 2(xy^2 + y^3z)\,\bar{j} + 3y^2z^2\bar{k}$ dan $\phi = x^2z + 2xy^2 + yz^2$,
Tentukan, pada titik (1, 2, -1),

(i) $\nabla\phi$;

(ii) $\nabla . A$

(iii) $\nabla \times A$; dan

(iv) $\nabla(\nabla . A)$.

(40%)

(b) Jika diberi satu daya, $F = x^2y^2\,\bar{i} + y^3z\,\bar{j} + z^2\bar{k}$, menggerakan suatu objek sepanjang garis lengkung C yang mempunyai persamaan parameter $x = 3t^2$, $y = 3t$, $z = t^3$, carilah kerja yang dilakukan oleh daya tersebut bagi menggerakkan objek ini dari titik A(2, -3, -1) ke titik B(2, 3, 1). Kerja diberi oleh persamaan, $w = \int_c F.dr.$

(30%)

(c) Dengan menggunakan teorem kecapahan Gauss atau cara lain, dapatkan nilai $\iint_s F.nds$, dengan S ialah permukaan kiub tertutup yang dibatasi oleh satah $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan $x = 6$, $y = 2$, $z = 7$ dan $F = x^2\,\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$.

(30%)

.../4

3. (a) (i) Jika A $= 2xz^2\bar{i} - xz\bar{j} + (y+z)\bar{k}$, dapatkan keikalan-keikalan A pada titik (2, 1, 1).

(ii) Tentukan terbitan berarah bagi $\phi = xe^y + yz^2 + xyz$ pada titik (2, 0, 3) yang searah dengan vektor A $= 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$.

(20%)

(b) Dengan menggunakan teorem Green, dapatkan nilai

$\oint_c \bar{F}.dr$ jika $\bar{F} = \left(e^{x^3} - 4y\right)\bar{i} - \left[\mathrm{Cos}\left(y^2\right) + 6x\right]\bar{j}$ dan c adalah segiempat yang mempunyai koordinat (1, 0), (3, 0), (3, 3), (1, 3).

(30%)

(c) Tunjukkan bahawa $\bar{F} = \left(yz^2 - 1\right)\bar{\mathrm{i}} + \left(xz^2 + e^y\right)\bar{\mathrm{j}}\ (2xyz + 1)\,\bar{\mathrm{k}}$ adalah abadi. Seterusnya dapatkan fungsi upaya bagi $\bar{F}$ tersebut. Dengan menggunakan fungsi upaya ini, dapatkan nilai $\int_c \bar{F}.dr$ dengan c ialah garislengkung licin cebis-cebisan dari titik (1, 1, 1) ke titik (-2, 1, 3)

(50%)

.../5

BAHAGIAN B:

4. (a) Andaikan persamaan gerakan bagi suatu peluncur adalah :

$$y = f(t) = 1600[1 - \text{eksponen}(-\frac{t}{5})] - 160t$$

$$x = r(t) = 800[1 - \text{eksponen}(-\frac{t}{5})]$$

Dengan menggunakan nilai awal bagi $t = 8$, cari masa sehingga terhempas peluncur itu menggunakan kaedah Newton-Raphson. Seterusnya cari julat semasa terhempas. Jawaban anda mesti dalam ENAM titik perpuluhan.

(40 %)

(b) Dalam suatu tindak balasa kimia, satu molekul A bergabung dengan satu molekul B untuk membentuk satu molekul bagi produk kimia C. Didapati bahawa kepekatan $y(t)$ bagi C, pada masa t adalah penyelesaian kepada masalah nilai awal yang berikut:-

$$y' = k(a - y)(b - y) \text{ dengan } y(0) = 0.$$

k ialah suatu pemalar positif, a dan b, masing-masing adalah nilai awal kepekatan bagi A dan B. Andaikan $k = 0.01$, $a = 70$ millimol/liter dan $b = 50$ millimol/liter.

Gunakan kaedah Runge-Kutta dengan $h = 0.5$ untuk mendapatkan penyelesaian pada $y(2)$. Jawaban anda mesti dalam TUJUH digit bererti.

(60 %)

.../6

5. (a) Andaikan halaju bagi sebuah kenderaan berat diberikan seperti dalam jadual yang di bawah.

Masa , t (jam)	**Halaju, $v(t)$ (km/jam)**
0.00	6.0
0.25	7.5
0.50	8.0
0.75	9.0
1.00	8.5
1.25	10.5
1.50	9.5
1.75	7.0
2.00	6.0

Cari jarak yang dilalui (dalam selang [0,2]) oleh kenderaan berat itu dengan menggunakan kaedah trapezium. Jawaban anda mesti dalam EMPAT titik perpuluhan.

(30 %)

(b) Gunakan lelaran Gauss-Seidel bagi menyelesaikan sistem persamaan linear yang berikut. Gunakan 5 langkah bermula dengan (1, 1, 1). Gunakan 6 digit bererti semasa pengiraan.

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 - x_3 &= 13 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 &= 36 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 &= 35 \end{aligned}$$

(30 %)

(c) Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan menggunakan $x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 4$ sebagai nilai awal, dapatkanungkapan bagi polinomial Lagrange. Seterusnya cari nilai $f(3)$ menggunakan polinomial Lagrange yang terhasil.

(40 %)

.../7

BAHAGIAN C:

6. (a) Dapatkan kembangan Siri Fourier bagi fungsi, $f(x) = x + x^2$, $-\pi < x < \pi$.

(50%)

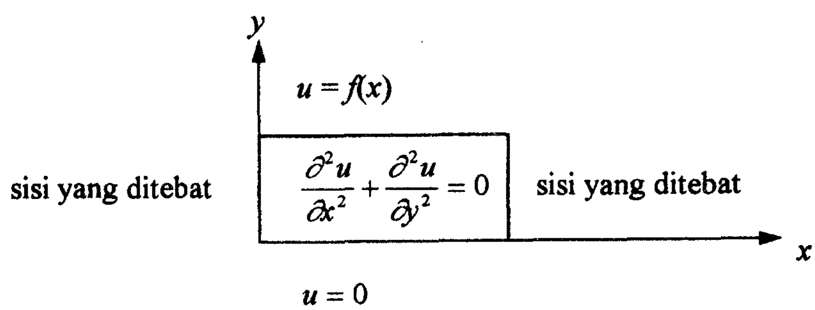
(i) Tunjukkan bahawa $u(x,y) = f(x-2y) + g(x+y)$ iaitu f dan g fungsi yang dikebezakan dua kali merupakan penyelesaian bagi persamaan pembeza

$$2u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} = 0$$

Petunjuk: $\left[\text{Biarkan } s = x - 2y \text{ dan } t = x + y\right]$

(30%)

(ii) Cari suhu $u(x, y)$ yang berkeadaan mantap di dalam kepingan segiempat tepat dengan syarat-syarat sempadan seperti yang ditunjukkan di dalam rajah berikut:



Selesaikan masalah nilai sempadan berikut:-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad 0 < x < a \quad , \quad 0 < y < b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) \quad ; \quad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 < x < a$$

$$u(x,b) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < b$$

(20%)

.../8

7. (a) Tunjukkan bahawa fungsi genap tidak mempunyai sebutan sinus dalam kembangan siri Fourier.

(20%)

(b) Dapatkan kembangan siri Fourier bagi fungsi

$$f(x) = |x| \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

(50%)

(c) Selesaikan $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ jika

$$u(o,t) = u(5,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = \sin\ 2\pi x$$

(30%)

oooOOOooo

CATATAN:

1) **Siri Fourier (kalaan 2π)**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ dengan pekali Fourier:}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad ;n = 1, 2, \ldots$$

2. **Siri Fourier (kalaan $2L$)**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ dengan pekali Fourier:}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad ;n = 1, 2, \ldots$$

3. **Persamaan haba**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L$$

Penyelesaian:

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$A_n = \int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

4. **Persamaan Gelombang**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 < x < L$$

Penyelesaian:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi\alpha}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi\alpha}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

5. **Penyelesaian D'Alembert untuk persamaan gelombang**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

Penyelesaian:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

6. **Persamaan Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \qquad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = f(x) \qquad 0 < x < a$$

Penyelesaian:

$$u = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{a} x\right.$$

$$A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x)\, dx$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x \; dx$$