
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 315 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Nyatakan (tanpa bukti) sama ada pernyataan berikut benar atau salah.

- (i) Set $[a, \infty)$ adalah tertutup.
- (ii) Jika K merupakan set Cantor, maka K adalah padat.
- (iii) Setiap set $A \subset \mathbb{R}$ yang terbatas adalah padat.
- (iv) Set $A = (0, 3)$ adalah terkait.

(20 markah)

(b) Diberi $A = (0, 1)$. Buktikan bahawa

- (i) $A^\circ = (0, 1)$
- (ii) $A' = [0, 1]$
- (iii) A terbuka.

(30 markah)

(c) Untuk sebarang $A \subset \mathbb{R}$, tutupan set A yang dilambangkan dengan \bar{A} ditakrifkan sebagai $\bar{A} = A \cup A'$. Diberi $B, C \subset \mathbb{R}$ dan $B \subset C$, tunjukkan bahawa $B' \subset C'$. Dengan ini tunjukkan $\bar{B} \subset \bar{C}$.

(50 markah)

2. (a) Berikan takrifan berikut yang menggunakan konsep $\epsilon - \delta$.

- (i) fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ selanjar pada titik $a \in A$.
- (ii) fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ selanjar secara seragam pada A .

(30 markah)

(b) Dengan menggunakan jujukan, tunjukkan bahawa

$$\text{had}_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \text{ tak wujud.}$$

(30 markah)

(c) Tunjukkan bahawa fungsi Dirichlet $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

adalah tak selanjar pada setiap nombor pada \mathbb{R} .

(40 markah)

3. (a) Andaikan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dan $a \in A \cap A'$. Berikan takrifan fungsi f terbeza pada nombor a . Seterusnya bincangkan sama ada fungsi $f(x) = |x|$ terbeza pada 0.

(30 markah)

(b) Andaikan f selanjar pada $[0, 1]$, terbeza pada $(0, 1)$, f' menokok pada $(0, 1)$ dan $f(0) = 0$. Tunjukkan bahawa fungsi $F(x) = f(x)/x$ adalah menokok pada $(0, 1]$.

(30 markah)

(c) Andaikan fungsi f adalah terbatas dan $g(x) = x^2 f(x)$. Tunjukkan bahawa g adalah terbeza pada 0 dan dapatkan $g'(0)$.

(40 markah)

4. (a) Tunjukkan dengan menggunakan takrif kamiran bahawa

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(30 markah)

(b) Jika $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ selanjar pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$, tunjukkan bahawa wujud $c \in (a, b)$ supaya $f(c) = g(c)$.

(30 markah)

(c) Jika fungsi f selanjar, $f \geq 0$ pada $[a, b]$ dan $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, tunjukkan bahawa $f = 0$ pada $[a, b]$.

(40 markah)

5. (a) Nyatakan serta buktikan Teorem Bolzano-Weierstrass.

(35 markah)

(b) Andaikan f selanjur pada \mathbb{R} . Untuk $a \in \mathbb{R}$ bincangkan sama ada $\{x: f(x) = a\}$ terbuka atau tertutup.

(35 markah)

(c) Nilaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$.

(30 markah)

- ooo0ooo -