UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 215 – Pengantar Analisis Berangka

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan ini.

1. (a) Diberi $f(x) = x^3 - 6x + 1$. Cari nilai tepat $f(1.22)$ dan kemudian tentukan ralat, ralat mutlak dan ralat relatif bagi $f(1.22)$ yang diambil tepat kepada tiga tempat perpuluhan.

(30 markah)

(b) Tunjukkan bahawa persamaan $\boldsymbol{kos\,x - x} = 0$ mempunyai satu punca sahaja di antara $x = 0$ dan $x = 1$. Cari 4 penghampiran berturut-turut kepada punca ini dengan menggunakan kaedah Newton tepat kepada 6 tempat perpuluhan dengan nilai permulaan $x_0 = 0.5$.

(70 markah)

2. (a) Diberi sistem persamaan linear $\boldsymbol{Ax=b}$

yang mana $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$

(i) Dapatkan penghuraian $\boldsymbol{LU}$.
(ii) Gunakan penghuraian ini untuk mencari penyelesaian $\boldsymbol{Ax=b}$.
(iii) Dapatkan A^{-1} melalui penghuraian $\boldsymbol{LU}$ atau dengan cara lain.
(iv) Kirakan sisanya.
(v) Dapatkan nombor suasana matriks A. Adakah sistem ini bersuasana sihat?

(70 markah)

(b) Dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel, selesaikan sistem persamaan berikut tepat kepada tiga tempat perpuluhan.

$$10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14$$
$$2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5$$
$$x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14$$

(30 markah)

3. (a) Diberikan empat titik berikut:

(1, 2), (2, 5), (3, 7) dan (5, 3).

(i) Gunakan rumus interpolasi Lagrange untuk mendapatkan persamaan polinomial yang melalui keempat-empat titik itu.

(ii) Seterusnya, dapatkan nilai bagi $f(2.5)$.

(40 markah)

...3/-

(b) Diberikan jadual nilai berikut:

x	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$
0	1.000
1	1.414
2	2.236
3	3.162
4	4.123
5	5.099
6	6.083
7	7.071
8	8.062
9	9.055

(i) Kirakan $\int_0^9 f(x)dx$ dengan menggunakan petua Trapezium.

(ii) Nilaikan $\int_0^9 f(x)dx$, $\int_0^8 f(x)dx$ dan $\int_0^7 f(x)dx$ dengan menggunakan petua Simpson.

(60 markah)

4. (a) Diberikan jadual nilai berikut:

x	0.0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518

(i) Binakan jadual beza untuk fungsi $f(x)$ di atas.

(ii) Dengan menggunakan rumus Newton-Gregory, anggarkan nilai untuk $f(0.2)$ dan $f(1.35)$.

(40 markah)

(b) Berikut adalah jadual beza bagi fungsi $f(x) = 1 + \log x$.

x	$1+\log x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0.15	0.1761				
		0.0543			
0.17	0.2304		-0.0059		
		0.0484		0.0009	
0.19	0.2788		-0.0050		0.0002
		0.0434		0.0011	
0.21	0.3222		-0.0039		-0.0005
		0.0395		0.0006	
0.23	0.3617		-0.0033		-0.0001
		0.0362		0.0005	
0.25	0.3979		-0.0027		-0.0003
		0.0335		0.0002	
0.27	0.4314		-0.0025		0.0003
		0.0310		0.0005	
0.29	0.4624		-0.0020		
		0.0290			
0.31	0.4914				

(i) Berpandukan kepada jadual beza di atas, nilaikan $f'(0.15)$ dan $f''(0.15)$ masing-masing dengan menggunakan rumus pembezaan berangka yang sesuai.

(ii) Gunakan rumus beza memusat untuk mencari $f'(0.21)$.

(60 markah)

5. (a) Diberi masalah nilai awal

$$y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = 2.$$

Gunakan kaedah siri Taylor sehingga sebutan x^4 untuk mendapatkan $y(2.1)$ tepat kepada lima tempat perpuluhan.

(30 markah)

(b) Kirakan penyelesaian hampiran $y(0.1)$ bagi persamaan pembezaan

$$y' = e^{2x} + y = f(x,y), \qquad y(0)=1$$

dengan menggunakan kaedah Runge-Kutta peringkat 4 dengan mengambil $h = 0.1$.

(30 markah)

(c) Pertimbangkan masalah

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \text{ dengan } y(0)=1.$$

Diketahui $y(0.1)=1.1103$, $y(0.2)=1.2428$, $y(0.3)=1.3997$ dan $y(0.4)=1.5836$, dapatkan nilai $y(0.5)$ dengan menggunakan kaedah Adams-Moulton.

Berikan anggaran bagi penyelesaian tepat.

(40 markah)

Rumus-Rumus

1. $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
2. $r=Ax-A\overline{x}$
3. $\|A\|_\infty=\underset{1\le i\le n}{maks}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$
4. $k(A)=\|A\|_\infty\ \|A^{-1}\|_\infty$
5. $P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}f(x_j)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\dfrac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$
6. $P_n(x)=f_0+q\,\Delta f_0+\dfrac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\ldots+\dfrac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$
7. $P_n(x)=f_0+q\,\Delta f_{-1}+\dfrac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 f_{-2}+\ldots+\dfrac{(q+n-1)(q+n-2)\ldots q}{n!}\Delta^n f_{-n}$
8. $f'(x_0)\approx\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
9. $f'(x_0)\approx\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$
10. $f'(x_0)\approx\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$
11. $\int_a^b f(x)dx\approx\dfrac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+\ldots+2f_{n-1}+f_n)$
12. $\int_a^b f(x)dx\approx\dfrac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\ldots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)$
13. $\int_a^b f(x)dx\approx\dfrac{3}{8}h(f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+3f_5+\ldots+2f_{n-3}+3f_{n-2}+3f_{n-1}+f_n)$
14. $y(x_0+h)=y(x_0)+y'(x_0)h+\dfrac{y''(x_0)}{2!}h^2+\dfrac{y'''(x_0)^3}{3!}+\dfrac{y^{(4)}(x_0)}{4!}h^4+\ldots$
15. $y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$, dengan $y'=f(x,y)$, $k_1=f(x_i,\,y_i)$,

    $k_2=f(x_i+\dfrac{h}{2},\,y_i+\dfrac{h}{2}k_1)$, $k_3=f(x_i+\dfrac{h}{2},\,y_i+\dfrac{h}{2}k_2)$, $k_4=f(x_i+h,\,y_i+hk_3)$
16. $y_{i+1}^{(1)}=y_i+\dfrac{h}{24}(55f_i-59f_{i-1}+37f_{i-2}-9f_{i-3})$,

    $y_{i+1}^{(2)}=y_i+\dfrac{h}{24}(9f_{i+1}+19f_i-5f_{i-1}+f_{i-2})$
17. $y_{i+1}=y_{i+1}^{(2)}-\dfrac{1}{14}(y_{i+1}^{(2)}-y_{i+1}^{(1)})$

- oooOooo -