
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 213 – Persamaan Pembezaan I

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Selesaikan masalah nilai awal berikut:

(i) $e^{t^2} \frac{dy}{dt} = t, y(0) = 1$

(ii) $\cos t \frac{dy}{dt} + (\sin t)y = \cos^2 t, y(0) = 2.$

(30 markah)

(b) Tunjukkan persamaan pembezaan

$$\left(1 - \frac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy = 0$$

adalah tepat. Seterusnya, cari penyelesaiannya.

(35 markah)

(c) Cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y+1}.$$

(35 markah)

2. (a) Terangkan bagaimana anda dapat menukar persamaan pembezaan peringkat pertama yang tak linear

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

kepada bentuk linear.

Bagaimana anda menyelesaikan persamaan tersebut bagi kes $n = 0$ dan $n = 1$?

(30 markah)

...3/-

- (b) Dapatkan suatu persamaan pembezaan linear yang homogen berperingkat kedua dengan koefisien malar jika diberi fungsi e^{-4x} dan xe^{-4x} membentuk set penyelesaian asasi.

(30 markah)

- (c) Selesaikan persamaan pembezaan

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

tertakluk kepada syarat awal

$$y(0) = -1, y'(0) = 2.$$

(40 markah)

3. (a) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$y'' + \alpha^2 y = \sin \beta x$$

yang mana α dan β adalah nombor nyata yang bukan sifar.

Tentukan bentuk penyelesaian khusus untuk persamaan tersebut bagi kes

(i) $\alpha = \beta$

(ii) $\alpha \neq \beta$.

Anda tidak perlu menilai pemalar yang terlibat.

(50 markah)

- (b) Diberi persamaan pembezaan

$$xy'' + (5x - 1)y' - 5y = 0.$$

Tunjukkan $y_1 = 5x - 1$ dan $y_2 = e^{-5x}$ membentuk set penyelesaian asasi.

Seterusnya, dengan menggunakan kaedah perubahan parameter, cari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan tak homogen

$$xy'' + (5x - 1)y' - 5y = x^2 e^{-5x}.$$

(50 markah)

...4/-

4. Diberi sistem persamaan pembezaan linear

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + 4z$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y + 4z$$

$$\frac{dz}{dt} = -x + 4z.$$

(a) Tuliskan sistem tersebut dalam bentuk persamaan matriks $\frac{dX}{dt} = AX$

yang mana A ialah matriks 3 x 3 dan $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(15 markah)

(b) Cari nilai eigen matriks A.

(30 markah)

(c) Cari tiga penyelesaian yang tak bersandar linear.

(40 markah)

(d) Dapatkan matriks penyelesaian asas.

(15 markah)

5. (a) Dengan menggunakan takrifan jelmaan Laplace, buktikan

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

jika a adalah sebarang nombor nyata.

(20 markah)

(b) Dengan menggunakan keputusan (a) dan Jadual 1, nilaikan

(i) $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\}$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 6s + 11}\right\}$.

(30 markah)

...5/-

(c) Selesaikan masalah nilai awal

$$y'' + y = f(t)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

jika diberi

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

(50 markah)

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos wt$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
$\sin wt$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Jadual 1

- ooo0ooo -

