UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

<u>CST201 Struktur Diskret</u>

Masa: [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi <u>lima</u> muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

Jawab **<u>SEMUA</u>** soalan.

1. (a) (i) Tuliskan rumus berikut di dalam bentuk awalan

$$(P \rightleftarrows Q) \rightleftarrows ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$$

(ii) Tuliskan rumus berikut dengan menggunakan hanya satu pengait sahaja

$$\neg (P \rightarrow Q)$$

[20 markah]

(b) (i) Tunjukkan bahawa nilai kebenaran rumus A berikut tidak bergantung kepada nilai-nilai kebenaran pembolehubahnya:

$$A \Leftrightarrow (\neg (P \wedge Q) \rightarrow (R \vee P)) \vee (P \rightarrow R)$$

(ii) Nilaikan rumus A di dalam keadaan berikut:

$$f = \{(P, 0), (Q, 1), (R, 1)\}$$

(iii) Dapatkan bentuk kanonik hasil darab hasil tambah (HDHT) bagi rumus B berikut:

$$B \Leftrightarrow ((\neg (P \wedge Q) \rightarrow (R \vee P)) \vee (P \rightarrow R)) \wedge ((Q \vee R) \wedge (\neg P \rightarrow R))$$

(iv) Dapatkan bentuk kanonik hasil tambah hasil tambah hasil darab (HTHD) rumus yang sama, iaitu B.

(v) Dirikan jadual kebenaran bagi rumus A dan rumus B di atas.

(vi) Buktikan bahawa rumus B adalah setara dengan rumus C berikut (tanpa menggunakan jadual kebenaran):

$$C \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow R) \wedge ((\neg P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

[50 markah]

...2/-

(c) Hujahkan sama ada pernyataan S berikut merupakan suatu kesimpulan sah daripada pernyataan H:

S: Saya tidak akan sakit sekiranya saya makan ubat, atau pun jika tidak benar bahawa saya degil tetapi masih makan ubat maka sama ada saya tidak akan sakit atau pun saya makan ubat.

H: Saya seorang degil yang tidak makan ubat, emak saya selalu marahkan saya tetapi saya masih mendegil sehinggakan bapa saya memukul saya setiap hari.

[30 markah]

2. (a) Dengan menggunakan kaedah meneliti keadaan, buktikan bahawa hujah berikut merupakan suatu hujah sah:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R,\ \neg P \vee S,\ \neg S \vdash \neg P \vee \neg Q$$

[20 markah]

(b) Gunakan bukti formal untuk membuktikan setiap satu daripada hujah-hujah berikut, dan seterusnya tuliskannya sebagai petua-petua pentaabiran:

(i) $\neg A,\ A \vee B \vdash B$

(ii) $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

(iii) $\neg (A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

[35 markah]

(c) Dengan menggunakan petua-petua pentaabiran di dalam (b) serta petua-petua pentaabiran biasa, buktikan hujah berikut:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R,\ \neg R \vee S,\ \neg S,\ \neg (N \vee \neg M) \vdash \neg P \vee M$$

[20 markah]

(d) Hujahkan bahawa pernyataan S berikut merupakan suatu kesimpulan sah daripada pernyataan H:

H: Saya makan rojak dan saya sakit perut

S: Saya ke hospital atau saya minta tolong ibu saya atau pun saya tidak ke hospital tetapi saya makan ubat atau pun tidak benar bahawa saya makan ubat sekiranya benar bahawa saya makan rojak dan sakit perut.

[25 markah]

...3/-

3. (a) Tentukan yang mana daripada yang berikut merupakan usulan dan yang mana merupakan predikat η-tempat. Bagi predikat-predikat η-tempat, berikan nilai η tersebut

(i) $(\forall x)((\exists y) \neg P(x, y, x) \to R(x))$

(ii) $(\forall x)((Q(x) \rightleftarrows R(x)) \wedge (\exists x) P(x)) \wedge S(x)$

(iii) $((\forall x) P(x,y) \wedge (\exists m) Q(m, n, s)) \to R(m, y)$

[15 markah]

(b) Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut bagi alam semesta nombor nyata IR (berikan sebab-sebabnya):

(i) $(\forall x)(\exists y)(xy = 1)$

(ii) $(\exists y)(\exists x)(xy = 1)$

(iii) $(\exists y)(\forall x)(xy = 1)$

[15 markah]

(c) Diberikan predikat-predikat berikut untuk alam semesta $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$S(x, y)$: $x = y$
a : integer 0
b : integer 1
$T(x,y)$: $x + y$
$D(x,y)$: $x * y$

Tuliskan pernyataan-pernyataan berikut di dalam bentuk bersimbol:

(i) semua integer tak negatif adalah ganjil atau pun genap

(ii) jika hasil darab dua integer tak negatif adalah sifar, maka sekurang-kurangnya satu daripadanya sifar.

[20 markah]

(d) Pertimbangkan tatasusunan $S[0... m-1]$ dengan $m > 0$. Bagi dua nombor asli j dan k dengan sifat $0 \le j \le k + 1 \le m$; tatatanda $S[j...k]$ bermaksud set kemasukan tatasusunan

$S[j], S[j+1], ..., S[k]$

yang merupakan set kosong jika j = k + 1. Gunakan predikat untuk menulis setiap pernyataan berikut dalam bentuk bersimbol.

(i) Semua kemasukan bernilai sifar.

(ii) Semua kemasukan di dalam S[0...k] bernilai kurang daripada setiap kemasukan S[k + 1 ... m - 1].

(iii) Terdapat tepat tiga kemasukan yang bernilai sifar.

(iv) Semua kemasukan genap bernilai ganjil.

[25 markah]

(e) "Alangkah indahnya sekiranya setiap orang di dunia mempunyai seseorang yang dikasihinya" kata Maimun, "tetapi bahaya pula kalau di dalam dunia ini terdapat seseorang yang disayangi semua orang !"

Ahmad berfikir panjang, lalu menyahut, "Kan kedua-dua pernyataan kamu itu sama?"

"Lain," jawab Maimun, "mungkin kalau satu daripadanya benar, yang satu lagi juga benar, tetapi tidak sebaliknya."

Ahmad tak sabar lagi, "Aku pun belajar logik juga! Tetapi kalau yang pertama (yang indah) benar maka yang kedua (yang bahaya) benar juga, apa yang indahnya; dan di sebaliknya, kalau yang kedua (yang bahaya) benar maka yang pertama (yang indah) benar, apa pula bahayanya?"

Maimun: "Kamu ni romantik sangat. Ini logik. Buat sajalah soalan ini!!"

Jelaskan keadaan yang sebenar dengan menggunakan bukti formal untuk pernyataan benar dan memberikan contoh lawan bagi pernyataan palsu.

[25 markah]

4. (a) Pertimbangkan pernyataan-pernyataan berikut:

P : Saya tidak suka membaca tetapi suka bersenam

Q : Jika saya suka bersenam, badan saya sihat

R : Jika badan saya sihat saya akan berjaya

(i) Tuliskan pernyataan-pernyataan di atas di dalam bentuk bersimbol yang mengandungi ayat-ayat primitif dan pengait-pengait yang sesuai.

(ii) Buktikan bahawa ayat S berikut merupakan suatu kesimpulan sah daripada premis-premis P, Q dan R:

S : saya akan berjaya dan badan saya sihat

(iii) Jika T berikut ditambah kepada P, Q dan R,

T : saya tidak akan berjaya sekiranya saya suka membaca

tentukan sama ada pernyataan V berikut mungkin merupakan suatu kesimpulan sah daripada premis-premis P, Q, R dan T:

V : saya akan berjaya tetapi perlu memakai kaca mata

[40 markah]

(b) Buktikan bahawa setiap tembereng program berikut <u>tepat seluruh</u>

(i) AI : $a<0$ (a nombor nyata)

$a := a * a$

A0 : $a>0$

(ii) AI : $(x = y + t) \wedge (t \leq z)$ (x, y, z nombor asli)

while $t \neq z$ **do**

begin $x := x + 1;$

$t := t + 1$

A0 : $(x = y + z)$

[60 markah]

...ooOoo...

C2: PETUA PENTAABIRAN DI DALAM SISTEM BUKTI FORMAL	
1(a)	$\wedge$ - K : $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}$
1(b)	$\wedge$ - H : $\dfrac{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}{A_i}$
2(a)	$\vee$ - K : $\dfrac{A_i}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}$
2(b)	$\vee$ - H : $\dfrac{A_1 \vee \ldots \vee A_n, A_1 \rightarrow A, \ldots, A_n \rightarrow A}{A}$
3(a)	$\neg$ - K : $\dfrac{\text{Dari } A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{\neg A}$
3(b)	$\neg$ - H : $\dfrac{\text{Dari } \neg A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{A}$
4(a)	$\rightarrow$ - K : $\dfrac{\text{Dari } A_1, \ldots, A_n \text{ taabirkan } A}{(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A}$
4(b)	$\rightarrow$ - H : $\dfrac{A_1 \rightarrow A_2, A_1}{A_2}$
5(a)	$\rightleftarrows$ - K : $\dfrac{A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_1}{A_1 \rightleftarrows A_2}$
5(b)	$\rightleftarrows$ - H : $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2}{A_1 \rightarrow A_2} \\ \\ \dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2}{A_2 \rightarrow A_1} \end{array} \right.$

C2: PETUA PENTAABIRAN DI DALAM SISTEM BUKTI FORMAL (SAMB.)	
6(a)	(IF-THEN-ELSE)-K : $\dfrac{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow C}{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}$
6(b)	(IF-THEN-ELSE)-H: $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{A \rightarrow B} \\ \\ \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{\neg A \rightarrow C} \end{array} \right.$
7.	Petua Ketransitifan : $\dfrac{A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3}{A_1 \rightarrow A_3}$
8.	Petua Penggantian : $\dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2, A(A_1)}{A(A_2)}$

C5: KESEPADANAN ISOMORFISMA (KESEPADANAN SATU DENGAN SATU)			
Aljabar Set	Aljabar Boolean	Aljabar Pernyataan	
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$a + a = a$ $a \cdot a = a$	Hukum idempoten $P \vee P \Longleftrightarrow P$ $P \wedge P \Longleftrightarrow P$	(1)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Hukum kalis sekutuan $(P \vee Q) \vee R \Longleftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	(2)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	Hukum kalis tukar tertib $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$	(3)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	Hukum kalis taburan $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	(4)
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap S = A$ (S, set semesta)	$a + 0 = a$ $a \cdot 1 = a$	$P \vee 0 \Longleftrightarrow P$ $P \wedge 1 \Longleftrightarrow P$	(5)
$A \cup S = S$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0$	$P \vee 1 \Longleftrightarrow 1$ $P \wedge 0 \Longleftrightarrow 0$	(6)
$A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	$a + \bar{a} = 1$ $a \cdot \bar{a} = 0$	$P \vee \neg P \Longleftrightarrow 1$ $P \wedge \neg P \Longleftrightarrow 0$	(7)
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$a + (a \cdot b) = a$ $a \cdot (a + b) = a$	Hukum penyerapan $P \vee (P \wedge Q) \Longleftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Longleftrightarrow P$	(8)
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$(\overline{a + b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$ $(\overline{a \cdot b}) = \bar{a} + \bar{b}$	Hukum De Morgan $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	(9)
$\bar{\emptyset} = S$ $\bar{S} = \emptyset$	$\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$	$\neg 0 \Longleftrightarrow 1$ $\neg 1 \Longleftrightarrow 0$	(10)
$(\bar{\bar{A}}) = A$	$(\bar{\bar{a}}) = a$	$\neg \neg P \Longleftrightarrow P$	(11)

AKSIOM BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM	
1.	Aksiom nol: $A\{\ \}A$
2.	Aksiom umpukan melalui Penggantian ke depan: $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ $(\exists y)(A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \wedge$ $x_i = U(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
3.	Aksiom umpukan melalui Penggantian ke belakang: $A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, U(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$ $\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n\}A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

PETUA PENTAABIRAN BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM			
1.	$\dfrac{A_1\{P_1\}A_2,\ A_2\{P_2\}A_3}{A_1\{P_1;\ P_2\}A_3}$	(Petua Penggubahan)	
2(a)	$\dfrac{A_1 \rightarrow A_2,\ A_2\{P\}A_3}{A_1\{P\}A_3}$	(Petua Akibat)	
2(b)	$\dfrac{A_1\{P\}A_2,\ A_2 \rightarrow A_3}{A_1\{P\}A_3}$		
3.	$\dfrac{(A_1 \wedge \mathit{syarat})\{P_1\}A_2,\ (A_1 \wedge \neg\, \mathit{syarat})\{P_2\}A_2}{A_1\{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } P_1 \text{ ELSE } P_2\}A_2}$	(Petua IF-THEN-ELSE)	(Petua bersyarat)
4.	$\dfrac{(A_1 \wedge \mathit{syarat})\ \{P\}\ A_2,\ (A_1 \wedge \neg\, \mathit{syarat}) \rightarrow A_2}{A_1\{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } P\}A_2}$	(Petua IF-THEN)	
5.	$\dfrac{(A \wedge \mathit{syarat})\ \{P\}\ A}{A\{\text{WHILE } \mathit{syarat} \text{ DO } P\}(A \wedge \neg\, \mathit{syarat})}$	(Petua WHILE-DO)	(Petua Pelelaran)
6.	$\dfrac{A_1\{P\}A_2,\ (A_2 \wedge \neg\, \mathit{syarat}) \rightarrow A_1}{A_1\{\text{REPEAT } P \text{ UNTIL } \mathit{syarat}\}(A_2 \wedge \mathit{syarat})}$	(Petua REPEAT-UNTIL)	