UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

CST201 - Struktur Diskret

Tarikh: 25 Oktober 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 11 muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Semua soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Andaikan R rumus bentuk awalan berikut:

$$R \Leftrightarrow \vee \rightarrow A\ B \wedge A \neg \wedge \rightleftarrows A\ B\ C$$

(i) Tuliskan R di dalam bentuk akhiran.

(ii) Apakah aras parentesis bagi pengait $\rightleftarrows$ jika R diberikan di dalam bentuk sisipan berparentesis penuh.

(iii) Berikan semua keadaan yang mungkin bagi R bernilai kebenaran 0 (palsu).

(25/100)

(b) Dengan menggunakan kaedah bukti secara automatik, tentukan kebenaran pernyataan berikut:

$$(P \vee Q) \wedge R,\ \neg Q \vdash P \rightleftarrows R$$

(25/100)

.../2

(c) Dengan mengambil $\mathbb{Z}$ sebagai alam semesta, dan menakrifkan:

$$D(x,y,z) : xy = z,$$
$$S(x,y) : x = y,$$
$$L(x,y) : x > y,$$

tuliskan ayat berikut di dalam bentuk bersimbol:

"Jika $x \leq y$ dan $z > 0$, maka $xz \geq yz$"

(20/100)

(d) Dengan mengambil alam semesta sebagai set yang mengandungi semua makhluk (termasuk orang, benda dan syaitan), takrifkan predikat-predikat yang sesuai dan tuliskan pantun berikut di dalam bentuk bersimbol:

Ada syaitan bermain guli
Bermain guli di tepi longkang
Semua orang sukakan Ali
Tetapi Ali kuat temberang

(30/100)

2\. (a) Dirikan suatu bukti formal untuk membuktikan pernyataan berikut:

$$P \rightarrow (Q \wedge R),\ \neg Q \vee \neg R \vdash \neg P \vee R$$

<u>petunjuk</u>: Bukti ini boleh mengandungi subbukti bagi <u>dari</u> $\neg Q \vee \neg R$ <u>taabirkan</u> $\neg(Q \wedge R)$.

(50/100)

(b) Tuliskan pernyataan yang diberikan di dalam (a) sebagai suatu petua pentaabiran. Kemudian, dengan menggunakan petua pentaabiran ini, dirikan suatu bukti formal untuk membuktikan hujah berikut:

"Sekiranya saya lulus peperiksaan, saya sudah makan kenyang dan sudah belajar bersungguh-sungguh. Jika saya belajar bersungguh-sungguh, saya pening kepala; dan saya lulus peperiksaan sekiranya saya tak pening kepala. Sebenarnya, saya belum makan (sebab saya tiada duit). Kesimpulannya, saya pening kepala".

[<u>perhatian</u>: Jangan ambil kira pernyataan di dalam parentesis, iaitu 'sebab saya tiada duit']

(50/100)

3. Program berikut mengirakan x mod y bagi dua integer positif x dan y. Buktikan bahawa program ini <u>tepat seluruh</u>:

```
{(x ≥ 0) ∧ (y > 0)}
begin      q := 0; r := x;
               {(x = q * y + r) ∧ (0 ≤ r)}
               while   r ≥ y do
                         begin   r := r - y;
                                 q := 1 + q
                         end
               {(x = q * y + r) ∧ (0 ≤ r < y)}
end
{r = x mod y}
```

(100/100)

4. (a) (i) Dapatkan bentuk kanonik hasil tambah hasil darab rumus

$$M \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee R$$

(ii) Dapatkan bentuk kanonik hasil darab hasil tambah rumus

$$N \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge R$$

(25/100)

(b) Berdasarkan jawapan-jawapan anda di atas, <u>hujahkan</u> (iaitu tanpa mendirikan bukti) tentang kebenaran tegasan-tegasan berikut:

(i) $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge R$

(ii) $\neg P \vee Q,\ R \vdash (P \wedge Q) \vee R$

(25/100)

(c) Andaikan pernyataan berikut benar:

$$P \rightarrow (Q \wedge R),\ \neg Q \vee \neg R \vdash \neg P \vee R$$

Tanpa mendirikan bukti formal, <u>hujahkan</u> tentang kebenaran tegasan yang berikut:

$$P \wedge \neg R \Rightarrow (P \wedge \neg(Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R)$$

(25/100)

(d) Anda berada di bintang Marikh. Penduduk di sana mempunyai logik yang mempunyai tiga nilai kebenaran: oola (0), hubub (1) dan zungga (2). Pengait-pengait yang digunakan ialah -, +, x, # dan =, yang ditakrifkan oleh jadual kebenaran berikut (A dan B merupakan pembolehubah):

A	B	-A	A+B	AxB	A#B	A=B
0	0	2	0	0	0	1
0	1	2	1	0	1	0
0	2	2	2	0	2	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	2	1	0	1
1	2	0	0	2	1	0
2	0	1	2	0	2	0
2	1	1	0	2	1	0
2	2	1	1	1	0	1

(i) Suatu rumus dipanggil PAK-HANG jika ia bernilai kebenaran hubub di dalam sekurang-kurangnya separuh daripada semua keadaan yang mungkin. Adakah rumus ((A+B) x B) # A) suatu PAK-HANG?

(ii) P <=> Q ditulis sekiranya P = Q suatu PAK-HANG. Adakah pernyataan berikut benar?

A + (-B) <=> A # B

(25/100)

...ooOoo...

	Jadual 1: Implikasi	
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	(penyederhanaan)
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$	(penambahan)
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$	
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_7	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	
I_8	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$	
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$	(silogisma disjunksi)
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	(modus ponens)
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	(modus tollens)
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	(silogisma hipotesisan)
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$	(dilema)
I_{15}	$(x)A(x) \vee (x)B(x) \Rightarrow (x)(A(x) \vee B(x))$	
I_{16}	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$	

	Jadual 2: Kesetaraan	
S_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	**(penafian ganda dua)**
S_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	**(Hukum kalis tukar tertib)**
S_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
S_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	**(Hukum kalis sekutuan)**
S_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
S_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	**(Hukum kalis taburan)**
S_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
S_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	**(Hukum De Morgan)**
S_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
S_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$	
S_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
S_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$	
S_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$	
S_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow 1$	
S_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow 0$	
S_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	
S_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
S_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	
S_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	
S_{20}	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$	

Jadual 2: Kesetaraan (sambungan)

S_{21}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
S_{22}	$(P \not\rightleftarrows Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
S_{23}	$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$
S_{24}	$(x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (x)A(x) \wedge (x)B(x)$
S_{25}	$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (x) \neg A(x)$
S_{26}	$\neg(x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg A(x)$
S_{27}	$(x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (x)B(x)$
S_{28}	$(\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$
S_{29}	$(x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
S_{30}	$(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (x)(A(x) \rightarrow B)$
S_{31}	$A \rightarrow (x)B(x) \Leftrightarrow (x)(A \rightarrow B(x))$
S_{32}	$A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$
S_{33}	$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$
S_{34}	$(\exists x)A(x) \rightarrow (x)B(x) \Leftrightarrow (x)(A(x) \rightarrow B(x))$

PETUA UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREM SECARA AUTOMATIK

Petua Anteseden:

Petua $\neg\Rightarrow$: Jika $\alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, \neg X, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\wedge\Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \wedge Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\vee\Rightarrow$: Jika $X, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan juga $Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \vee Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\rightarrow\Rightarrow$: Jika $Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan juga $\alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\rightleftarrows\Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan $\alpha, \beta \overset{u}{\Rightarrow} X, Y, \gamma$, maka $\alpha, X \rightleftarrows Y, \beta \overset{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua Akibat:

Petua $\Rightarrow\neg$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, \neg X, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\wedge$: Jika $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$ dan juga $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \wedge Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\vee$: Jika $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} X, Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \vee Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\rightarrow$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \rightarrow Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow\rightleftarrows$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$ dan juga $Y, \alpha \overset{u}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$,
maka $\alpha \overset{u}{\Rightarrow} \beta, X \rightleftarrows Y, \gamma$

PETUA PENTAABIRAN DALAM SISTEM BUKTI FORMAL	
1.a	$\wedge - K : \dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}$
1.b	$\wedge - H : \dfrac{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}{A_i}$
2.a	$\vee - K : \dfrac{A_i}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}$
2.b	$\vee - H : \dfrac{A_1 \vee \ldots \vee A_n,\ A_1 \rightarrow A,\ \ldots,\ A_n \rightarrow A}{A}$
3.a	$\neg - K : \dfrac{\text{Dari } A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{\neg A}$
3.b	$\neg - H : \dfrac{\text{Dari } \neg A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{A}$
4.a	$\rightarrow - K : \dfrac{\text{Dari } A_1, \ldots, A_n \text{ taabirkan } A}{(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A}$
4.b	$\rightarrow - H : \dfrac{A_1 \rightarrow A_2,\ A_1}{A_2}$
5.a	$\rightleftarrows - K : \dfrac{A_1 \rightarrow A_2,\ A_2 \rightarrow A_1}{A_1 \rightleftarrows A_2}$
5.b	$\rightleftarrows - H : \dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2}{A_1 \rightarrow A_2,\ A_2 \rightarrow A_1}$
6.a	$(\text{IF-THEN-ELSE})\text{-}K : \dfrac{A \rightarrow B,\ \neg A \rightarrow C}{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}$
6.b	$(\text{IF-THEN-ELSE})\text{-}H : \begin{cases} \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{A \rightarrow B} \\ \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{\neg A \rightarrow C} \end{cases}$
7.	Petua Ke[illegible] : $\dfrac{A_1 \rightarrow A_2,\ A_2 \rightarrow A_3}{A_1 \rightarrow A_3}$
8.	Petua Peng[illegible] : $\dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2,\ [illegible](A_1)}{[illegible]}$

PETUA PENTAABIRAN BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM		
1.	$\dfrac{Q_1\{S_1\}Q_2,\ Q_2\{S_2\}Q_3}{Q_1\{S_1;\ S_2\}Q_3}$	(Petua Penggubahan)
2.a	$\dfrac{Q_1 \rightarrow Q_2,\ Q_2\{S\}Q_3}{Q_1\{S\}Q_3}$	(Petua Akibat)
2.b	$\dfrac{Q_1\{S\}Q_2,\ Q_2 \rightarrow Q_3}{Q_1\{S\}Q_3}$	
3.	$\dfrac{(Q_1 \wedge \mathit{syarat})\ \{S\}\ Q_2,\ (Q_1 \wedge \neg\, \mathit{syarat}) \rightarrow Q_2}{Q_1\ \{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } S\}\ Q_2}$	(Petua IF-THEN)
4.	$\dfrac{(Q_1 \wedge \mathit{syarat})\{S_1\}Q_2,\ (Q_1 \wedge \neg\, \mathit{syarat})\{S_2\}Q_2}{Q_1\{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } S_1 \text{ ELSE } S_2\}Q_2}$	(Petua IF-THEN-ELSE)
5.	$\dfrac{(Q \wedge \mathit{syarat})\ \{S\}\ Q}{Q\{\text{WHILE } \mathit{syarat} \text{ DO } S\}(Q \wedge \neg\, \mathit{syarat})}$	(Petua Pelelaran)

AKSIOM UMPUKAN	
1.	Untuk Pembinaan ke depan: $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ $(\exists y)(A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \wedge$ $x_i = U(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
2.	Untuk Pembinaan ke belakang: $A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, U(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$ $\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

IDENTITI BERKENAAN SET & KESETARAAN BERKENAAN PERNYATAAN		
Aljabar Set	Aljabar Pernyataan	
	Hukum idempoten	
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	(1)
	Hukum kalis sekutuan	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	(2)
	Hukum kalis tukar tertib	
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	(3)
	Hukum kalis taburan	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	(4)
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap S = A$	$P \vee 0 \Leftrightarrow P$ $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$	(5)
$A \cup S = S$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	(6)
$A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$ $P \vee \neg P \Leftrightarrow 0$	(7)
	Hukum penyerapan	
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	(8)
	Hukum De Morgan	
$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$ $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	(9)
$\bar{\emptyset} = S$ $\bar{S} = \emptyset$	$\neg 0 \Leftrightarrow 1$ $\neg 1 \Leftrightarrow 0$	(10)
$\overline{(\bar{A})} = A$	[illegible]	(11)