UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1988/89

Jun 1989

CST201 - Struktur Diskret

Masa : [3 jam]

---

1. (a) Rumus R1 berikut diberikan di dalam bentuk awalan

R1 $\Leftrightarrow$ V-> CB $\wedge$ AB

(i) Dirikan jadual kebenaran bagi rumus ini.

(ii) Dari jadual kebenaran ini, dapatkan bentuk kanonik hasil darab hasil tambah (HDHT) bagi R1.

(20 markah)

(b) Rumus R2 ditakrifkan seperti berikut:

$R2 \Leftrightarrow (A \vee B) \rightarrow (B \wedge C)$

(i) Dengan menggunakan hukum-hukum aljabar pernyataan $H_1 - H_{12}$, dapatkan bentuk kanonik hasil tambah hasil darab (HTHD) bagi R2.

(ii) Berdasarkan jawapan-jawapan anda bagi (a)(i) dan b(i), dirikan jadual kebenaran bagi rumus $R1 \bar{\vee} R2$.

(iii) Dari jadual kebenaran ini, berikan bentuk kanonik hasil darab hasil tambah (HDHT) bagi $R1 \bar{\vee} R2$. Kemudian berikan rumus berbentuk paling mudah yang setara dengan rumus.

$$((R1 \bar{\vee} R2) \wedge A) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

(30 markah)

...2/-

(c) Pertimbangkan pernyataan berikut:

P: Sekiranya Ali sakit dan tidak benar bahawa dia makan roti canai atau dia tidur, maka samada Ali makan roti canai dan tidur atau pun jika dia sakit maka dia tidur.

(i) Tuliskan pernyataan P di dalam bentuk bersimbol.

(ii) Lakarkan gambarajah pohon bagi rumus P yang didapati dari (i). Kemudian gunakan gambarajah pohon ini untuk menentukan semua keadaan yang menyebabkan P palsu.

(iii) Hujahkan (tanpa bukti) samada pernyataan Q merupakan kesimpulan sah daripada pernyataan R berikut:

Q: Ali tak makan roti canai dan tak tidur tetapi sakit, atau P.

R: Ali sakit angau.

[50 markah]

2. (a) Pertimbangan dua hujah h1 dan h2 berikut:

h1: $P \rightarrow \neg Q,\ Q \vdash \neg P$

h2: $\neg P,\ P \vee Q \vdash Q$

(i) Dirikan bukti-bukti formal untuk membuktikan h1 dan h2.

(ii) Tuliskan h1 dan h2 dalam bentuk petua pentaabiran.

(iii) Dengan menggunakan petua-petua pentaabiran ini, gunakan bukti formal untuk membuktikan yang berikut:

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow \neg C,\ C,\ A \vee (D \wedge E) \Rightarrow E \vee \neg C$$

(50 markah)

...3/-

(b) Buktikan samada hujah berikut merupakan suatu hujah sah atau tidak (jadual kebenaran tidak boleh digunakan):

$$(A \wedge B) \rightarrow C,\quad A \vdash C$$

(20 markah)

(c) Di bawah disenaraikan petua pentaabiran di dalam sistem bukti formal bagi pengait terner IF-THEN-ELSE:

ITE-K: $\dfrac{A \rightarrow B,\quad \neg A \rightarrow C}{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}$

ITE-H: $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{A \rightarrow B} \\ \\ \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{\neg A \rightarrow C} \end{array} \right.$

Dengan menggunakan petua-petua ini dan juga petua-petua pentaabiran biasa, dirikan suatu bukti formal untuk membuktikan

$$(\text{IF } \neg P \text{ THEN } Q \text{ ELSE } R) \vdash (\text{IF } P \text{ THEN } R \text{ ELSE } Q)$$

[amaran: anda tidak boleh menganggapkan $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$]

(30 markah)

3\. (a) Katakan $\mathbb{Z}$ ialah alam semesta bagi predikat-predikat berikut:

D(x,y): $x * y$
H(x,y): $x + y$
S(x,y): $x = y$
L(x,y): $x > y$

...4/-

Tuliskan avat-avat berikut dalam bentuk predikat-predikat ini:

(i) Hasil darab setiap dua integer positif adalah lebih besar atau sama dengan hasil tambahnya.

(ii) Tidak wujud suatu integer yang terbesar.

(iii) Jika $x \leq y$ dan $z > o$, maka $xz \geq yz$

(iv) Semua integer yang terbahagikan oleh 8 merupakan nombor genap.

(40 markah)

(b) (i) Katakan $S=\{0,1\}$ ialah alam semesta. Dengan menghapuskan pengkuantiti, dapatkan suatu rumus usulan yang setara dengan rumus $(\exists x)(\forall y)\ R(x,y)$.

(ii) Diberikan $A = \{-2,3,6\}$ sebagai alam semesta bagi predikat-predikat berikut:

$P(x,y)$: $x > y$
$Q(x)$: $x < 3$
$R(x)$: $x > 5$
a : 5

Tentukan nilai kebenaran bagi rumus berikut:

$$(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$$

(20 markah)

(c) Dirikan bukti formal untuk membuktikan hujah beikut:

$$(\forall x)P(a,x), (\forall x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow Q(x)) \vdash Q(a)$$

(15 markah)

(d) Dengan menggunakan predikat-predikat berikut:

D(x,y): x*y
T(x,y): x-y
S(x,y): x=y

Takrifkan fungsi: faktorial FAKT(n) bagi semua n $\in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

[Peringatan: $\text{FAKT}(n) = n! = \begin{cases} 1 & \text{jika } n = 0 \\ n*(n-1)! & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$]

(25 markah)

4. (a) Buktikan ketapatan separa program-program berikut:

(i)

```
AI:  (a≥0)∧(b>0)
begin  q: = -1;
       r: = a+b;
       r: = r-b;
       q: = 1+q

end
Ao:  (a = q * b + r) ∧ (r ≥ 0)
```

(ii)

```
AI:  (a = q * b + r)∧(r ≥ 0)
begin  while  r ≥ b do
           begin  r: = r - b;
                  q: = 1 + q
           end
end
Ao: (a = q * b + r) ∧ (0 ≤ r < b)
```

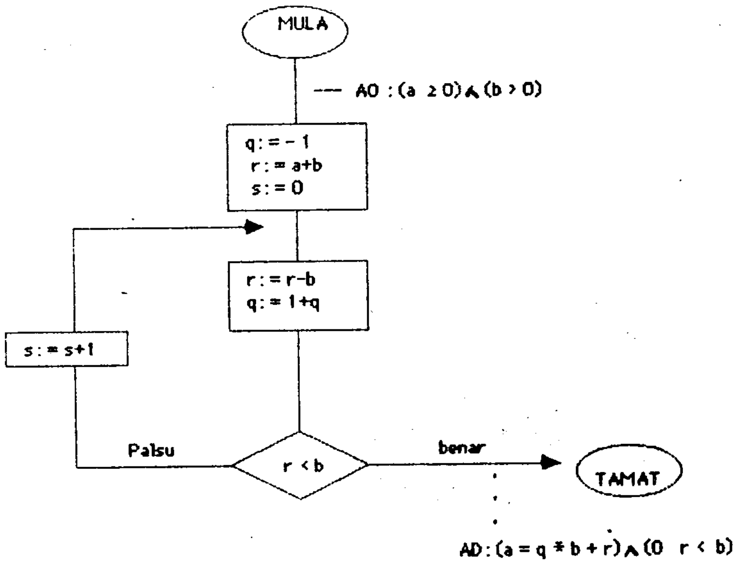
(50 markah)

...6/-

(b) Berikut diberikan suatu carta aliran dengan tegasan-tegasan input dan outputnya. Dengan memilih pernataan-pernyataan daripada {begin-end, while-do, repeat-until, if-then} sahaja.

(i) Tuliskan suatu program yang mengimplementasikan carta aliran ini.

(ii) Kemudian buktikan ketepatan seluruh program anda.



[Petunjuk: bukti tepat separa boleh merujuk kepada (a)(i) dan (ii) dengan syarat penglibatan pembolehubah s dapat dijelaskan].

(50 markah)

-oooOOooo-

	Jadual 1: Implikasi	
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	(penyederhanaan)
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$	(penambahan)
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$	
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_7	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	
I_8	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$	
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$	(silogisma disjunksi)
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	(modus ponens)
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	(modus tollens)
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	(silogisma hipotesisan)
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$	(dilema)
I_{15}	$(x)A(x) \vee (x)B(x) \Rightarrow (x)(A(x) \vee B(x))$	
I_{16}	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$	

	Jadual 2: Kesetaraan	
S_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	(penafian ganda dua)
S_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	(Hukum kalis tukar tertib)
S_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
S_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	(Hukum kalis sekutuan)
S_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
S_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	(Hukum kalis taburan)
S_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
S_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	(Hukum De Morgan)
S_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
S_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$	
S_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
S_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$	
S_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$	
S_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow 1$	
S_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow 0$	
S_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	
S_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
S_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	
S_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	
S_{20}	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$	

Jadual 2: Kesetaraan (sambungan)

S_{21}	$P \rightleftarrows Q \Longleftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
S_{22}	$(P \rightleftarrows Q) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
S_{23}	$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$
S_{24}	$(x)(A(x) \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (x)A(x) \wedge (x)B(x)$
S_{25}	$\neg(\exists x)A(x) \Longleftrightarrow (x)\neg A(x)$
S_{26}	$\neg(x)A(x) \Longleftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$
S_{27}	$(x)(A \vee B(x)) \Longleftrightarrow A \vee (x)B(x)$
S_{28}	$(\exists x)(A \wedge B(x)) \Longleftrightarrow A \wedge (\exists x)B(x)$
S_{29}	$(x)A(x) \rightarrow B \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
S_{30}	$(\exists x)A(x) \rightarrow B \Longleftrightarrow (x)(A(x) \rightarrow B)$
S_{31}	$A \rightarrow (x)B(x) \Longleftrightarrow (x)(A \rightarrow B(x))$
S_{32}	$A \rightarrow (\exists x)B(x) \Longleftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$
S_{33}	$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Longleftrightarrow (x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$
S_{34}	$(\exists x)A(x) \rightarrow (x)B(x) \Longleftrightarrow (x)(A(x) \rightarrow B(x))$

PETUA UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREM SECARA AUTOMATIK

Petua Anteseden:

Petua $\neg \Rightarrow$: Jika $\alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, \neg X, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$.

Petua $\wedge \Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \wedge Y, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$.

Petua $\vee \Rightarrow$: Jika $X, \alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$ dan juga $Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \vee Y, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$.

Petua $\rightarrow \Rightarrow$: Jika $Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$ dan juga $\alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$.

Petua $\rightleftarrows \Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$ dan $\alpha, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} X, Y, \gamma$, maka $\alpha, X \rightleftarrows Y, \beta \overset{u}{\Longrightarrow} \gamma$.

Petua Akibat:

Petua $\Rightarrow \neg$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Longrightarrow} \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} \beta, \neg X, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \wedge$: Jika $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} X, \beta, \gamma$ dan juga $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} \beta, X \wedge Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \vee$: Jika $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} X, Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} \beta, X \vee Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \rightarrow$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Longrightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} \beta, X \rightarrow Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \rightleftarrows$: Jika $X, \alpha \overset{u}{\Longrightarrow} Y, \beta, \gamma$ dan juga $Y, \alpha \overset{u}{\Longrightarrow} X, \beta, \gamma$,
maka $\alpha \overset{u}{\Longrightarrow} \beta, X \rightleftarrows Y, \gamma$

PETUA PENTAABIRAN DALAM SISTEM BUKTI FORMAL

1.a	$\wedge - K : \dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}$
1.b	$\wedge - H : \dfrac{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}{A_i}$
2.a	$\vee - K : \dfrac{A_i}{A_1 \vee \ldots \vee A_n}$
2.b	$\vee - H : \dfrac{A_1 \vee \ldots \vee A_n,\ A_1 \to A, \ldots, A_n \to A}{A}$
3.a	$\neg - K : \dfrac{\text{Dari } A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{\neg A}$
3.b	$\neg - H : \dfrac{\text{Dari } \neg A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{A}$
4.a	$\to - K : \dfrac{\text{Dari } A_1, \ldots, A_n \text{ taabirkan } A}{(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A}$
4.b	$\to - H : \dfrac{A_1 \to A_2,\ A_1}{A_2}$
5.a	$\rightleftarrows - K : \dfrac{A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_1}{A_1 \rightleftarrows A_2}$
5.b	$\rightleftarrows - H : \dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2}{A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_1}$
6.a	$(\text{IF-THEN-ELSE})-K : \dfrac{A \to B,\ \neg A \to C}{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}$
6.b	$(\text{IF-THEN-ELSE})-H : \begin{cases} \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{A \to B} \\ \dfrac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{\neg A \to C} \end{cases}$
7.	Petua Ketransitifan : $\dfrac{A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_3}{A_1 \to A_3}$
8.	Petua Penggantian : $\dfrac{A_1 \rightleftarrows A_2,\ A(A_1)}{A(A_2)}$

PETUA PENTAABIRAN BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM		
1.	$\dfrac{Q_1\{S_1\}Q_2,\ Q_2\{S_2\}Q_3}{Q_1\{S_1;\ S_2\}Q_3}$	(Petua Penggubahan)
2.a	$\dfrac{Q_1 \rightarrow Q_2,\ Q_2\{S\}Q_3}{Q_1\{S\}Q_3}$	(Petua Akibat)
2.b	$\dfrac{Q_1\{S\}Q_2,\ Q_2 \rightarrow Q_3}{Q_1\{S\}Q_3}$	
3.	$\dfrac{(Q_1 \wedge \mathit{syarat})\ \{S\}\ Q_2,\ (Q_1 \wedge \neg\,\mathit{syarat}) \rightarrow Q_2}{Q_1\ \{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } S\}\ Q_2}$	(Petua IF-THEN)
4.	$\dfrac{(Q_1 \wedge \mathit{syarat})\{S_1\}Q_2,\ (Q_1 \wedge \neg\,\mathit{syarat})\{S_2\}Q_2}{Q_1\{\text{IF } \mathit{syarat} \text{ THEN } S_1 \text{ ELSE } S_2\}Q_2}$	(Petua IF-THEN-ELSE)
5.	$\dfrac{(Q \wedge \mathit{syarat})\ \{S\}\ Q}{Q\{\text{WHILE } \mathit{syarat} \text{ DO } S\}(Q \wedge \neg\,\mathit{syarat})}$	(Petua **Pelelaran**)

AKSIOM UMPUKAN	
1.	Untuk Pembinaan ke depan: $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ $(\exists y)(A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \wedge$ $x_i = U(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n))$
2.	Untuk Pembinaan ke belakang: $A(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, U(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$ $\{x_i := U(x_1, x_2, \ldots, x_n\}A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

IDENTITI BERKENAAN SET & KESETARAAN BERKENAAN PERNYATAAN		
Aljabar Set	Aljabar Pernyataan	
	Hukum idempoten	
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	(1)
	Hukum kalis sekutuan	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	(2)
	Hukum kalis tukar tertib	
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	(3)
	Hukum kalis taburan	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	(4)
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap S = A$	$P \vee 0 \Leftrightarrow P$ $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$	(5)
$A \cup S = S$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	(6)
$A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$ $P \vee \neg P \Leftrightarrow 0$	(7)
	Hukum penyerapan	
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	(8)
	Hukum De Morgan	
$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$ $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	(9)
$\bar{\emptyset} = S$ $\bar{S} = \emptyset$	$\neg 0 \Leftrightarrow 1$ $\neg 1 \Leftrightarrow 0$	(10)
$\overline{(\bar{A})} = A$	$\neg \neg P \Leftrightarrow P$	(11)