

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1986/87

CST201 - Struktur Diskret

Tarikh: 22 Jun 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tgh.
(3 Jam)

Jawab empat soalan.

Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Pertimbangkan rumus yang berikut:

$$P \rightarrow (Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg P) \rightarrow Q \wedge \neg R$$

Lukis satu gambarajah pokok bagi rumus itu, kemudian gunakan gambarajah tersebut untuk menulis rumus itu sebagai:

- (i) bentuk sisipan
- (ii) bentuk Poland yang lain

(20/100)

(b) Tukarkan ungkapan-ungkapan berikut:

(i) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (\neg(P \vee R) \wedge \neg Q)$
kepada bentuk tatatanda awalan

(ii) $PQR \rightarrow \neg \neg \neg PR \vee \neg PQ \vee \neg \neg \rightarrow \neg$
kepada bentuk tatatanda sisipan.

(20/100)

(c) Tanpa membina jadual kebenaran, tunjukkan bahawa

$$(\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge (P \vee \neg Q \vee R \vee \neg S) \Leftrightarrow (P \supset Q) \vee (R \supset S).$$

(20/100)

(d) Dalam predikat n-tempat yang berikut ($n \geq 0$), lukiskan tanda \rightarrow dari setiap pemboleh ubah terikat dan/atau pemboleh ubah mengikat ke pengkuantiti yang berkenaan, dan dengan demikian, memperlihatkan pemboleh ubah yang bebas di situ.

$$(\forall x) (\exists y) (P(x,y) \wedge \neg \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y))).$$

(20/100)

(e) Jika A (P,Q,R) berbentuk

$$P \uparrow (R \wedge (Q \downarrow R))$$

(i) dapatkan dualnya $A^* (P,Q,R)$ (5/100)

(ii) carilah rumus yang setara dengan A dan A^* dan yang mengandungi hanya pangait \wedge , \vee dan \neg .

(15/100)

2. (a) Pertimbangkan rumus berikut:

$$P \rightarrow Q \vee \neg P \rightarrow \neg Q \wedge P \rightarrow R \rightarrow R$$

(i) Dengan ringkas terangkan bagaimana rumus itu dapat dinilai. Seterusnya, cari nilai kebenarannya jika P, Q dan R kesemuanya mempunyai nilai kebenaran T(BENAR).

(25/100)

(ii) Lukiskan gambarajah pokok untuk menggambarkan rumus tersebut.

(10/100)

(iii) Tanpa membina jadual kebenaran, terangkan samada rumus itu suatu tautologi.

(15/100)

- (b) Dengan menggunakan proses Pembuktian Teorem Automatik, tunjukkan bahawa $S \vee R$ diimplikasikan secara tautologi oleh $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)$.

(30/100)

- (c) Buktikan

$$(IF \neg P THEN Q ELSE R) \vdash (IF P THEN R ELSE Q)$$

secara formal.

Gunakan hanya Petua pentaabiran dalam sistem bukti formal seperti yang disenaraikan dalam lampiran sahaja.

(20/100)

- 3. (a) Tunjukkan bahawa

$$P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow (\neg P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg R))))$$

adalah suatu tautologi.

(20/100)

- (b) Terangkan samada rumus berikut terbentuk rapi

$$P \leftarrow R \ S \ \neg \ Q \ R \ V \rightarrow \ V \ S \ \neg \ P \ \wedge \ \neg \ \wedge$$

(10/100)

- (c) Dapatkan rumus setara

$$(1) \quad (\neg P \vee (R \rightarrow Q)) \wedge \neg P \wedge Q$$

yang hanya mengandongi pengait \vee dan \neg sahaja.

(10/100)

(ii) $(P \wedge R) \vee \neg Q$

yang hanya mengandungi pengait \uparrow sahaja.

(15/100)

- (d) Dapatkan bentuk kanonik hasil darab hasil tambah dari rumus yang berikut:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R).$$

(15/100)

- (e) Tunjukkan dari premis-premis yang berikut:

(i) $(\exists x) (F(x) \wedge S(x)) \rightarrow (y) (M(y) \rightarrow W(y)),$

(ii) $(\exists y) (M(y) \vee \neg W(y)),$

kesimpulan $(x) (F(x) \rightarrow \neg S(x))$ mengikut.

(30/100)

4. (a) Katakan f_1 dan f_2 adalah dua fungsi Boole yang diberi dan yang berbentuk kanonik hasil tambah hasil darab.

- (i) Tunjukkan bahawa fungsi Boole g yang diperolehi dengan cara mendalikan f_1 dengan f_2 , (iaitu, $g = f_1 \cdot f_2 = f_1 f_2$), mempunyai bentuk kanonik hasil tambah hasil darab yang terdiri daripada hanya sebutan minimum yang sepunya sahaja, dari f_1 dan f_2 .

(10/100)

- (ii) Jika $f_1(x, y, z, w) = xy\bar{z} + \bar{z}w + \bar{x}z\bar{w} + \bar{y}z\bar{w}$ dan $f_2(x, y, z, w) = (x + y + \bar{z} + \bar{w})(\bar{y} + \bar{z} + w)(\bar{x} + z + \bar{w})$ dapatkan bentuk kanonik hasil tambah hasil darab bagi $g = f_1 f_2$, dan ringkaskannya dengan menggunakan peta Karnaugh.

(30/100)

(b) Buktikan bahawa

$$((\exists x) P(x) \rightarrow (x) Q(x)) \vdash (x) (P(x) \rightarrow Q(x))$$

(15/100)

(c) Buktikan implikasi yang berikut:

$$(x) (P(x) \rightarrow Q(x)), (x) (Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (x) (P(x) \rightarrow R(x))$$

(20/100)

(d) Buktikan bahawa program di bawah tepat terhadap tegasan input AI dan tegasan output AO

```

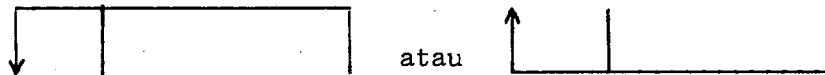
AI : TRUE
IF x ≥ y THEN maks := x ELSE maks := y
AO : (x ≥ y ∧ maks = x) ∨ (x < y ∧ maks = y)

```

Nyatakan Petua Pentaabiran serta Aksiom Umpukan yang digunakan.

(25/100)

5. (a) Bagi setiap yang berikut, lukiskan tanda



untuk menggambarkan kejadian mengikat dan kejadian terikat
pencam yang muncul di situ.

(i) $(\exists y) (P(z,y) \rightarrow (\forall z) P(z,y))$

(ii) $((\forall x) (\exists y) P(x,y) \wedge (\forall y) (\exists z) Q(y,z)) \rightarrow (\forall x) (\exists y) (\exists z) (P(x,y) \wedge Q(y,z))$

(20/100)

- (b) Tulis kesemua pernyataan dalam taakulan di atas sebagai bentuk bersimbol.

"Semua orang yang menghadiri Persidangan Antarabangsa itu adalah pakar sains komputer. Encik Rafie yang menghadiri Persidangan Antarabangsa itu adalah seorang ahli perniagaan.

Oleh sebab itu, sekurang-kurangnya satu daripada orang yang menghadiri Persidangan Antarabangsa itu adalah seorang pakar sains komputer dan juga seorang ahli perniagaan".

(10/100)

- (c) Tanpa menggunakan jadual kebenaran, buktikan bahawa

$$\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (P \wedge Q)))$$

(15/100)

- (d) Lukiskan suatu litar yang akan menerima 3 input x, y dan z dan mengembalikan 4 ungkapan Boole yakni

$$f1 = z \oplus y \oplus z$$

$$f2 = \bar{x}yz + x\bar{y}z,$$

$$f3 = xy\bar{z} + (\bar{x} + \bar{y})z,$$

$$\text{dan } f4 = xyz$$

sebagai output. Terangkan.

Gunakan hanya 3 penambah setengah sahaja.

(30/100)

- (e) Buktikan bahwa program yang dibawah tepat terhadap tegasan input AI dan tegasan output AO. Nyatakan Petua Pentaabiran serta Aksiom Umpukan yang digunakan.

(*Program ini menguntukkan x kepada nilai mutlaknya*)

AI : $x = t$ (*t suatu pembolehubah bantu*)

if $x < 0$ then $x := -x$

AO : $(t < 0 \rightarrow x = -t) \wedge (t \geq 0 \rightarrow x = t)$.

(25/100)

...oo0oo...

- 1 -

Jadual 1: Implikasi		
I ₁	$P \wedge Q \Rightarrow P$	} (penyederhanaan)
I ₂	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	
I ₃	$P \Rightarrow P \vee Q$	} (penambahan)
I ₄	$Q \Rightarrow P \vee Q$	
I ₅	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I ₆	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I ₇	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	
I ₈	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	
I ₉	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$	
I ₁₀	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$	(silogisma disjungsi)
I ₁₁	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	(modus ponens)
I ₁₂	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	(modus tollens)
I ₁₃	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	(silogisma hipotesisan)
I ₁₄	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$	(dilema)
I ₁₅	$(x)A(x) \vee (x)B(x) \Rightarrow (x)(A(x) \vee B(x))$	
I ₁₆	$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$	

- 2 -

Jadual 2: Kesetaraan		
S ₁	$\neg\neg P \leftrightarrow P$	(penafian ganda dua)
S ₂	$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$	} (Hukum kalis tukar tertib)
S ₃	$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$	
S ₄	$(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	} (Hukum kalis sekutuan)
S ₅	$(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
S ₆	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	} (Hukum kalis taburan)
S ₇	$P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
S ₈	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	} (Hukum De Morgan)
S ₉	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
S ₁₀	$P \vee P \leftrightarrow P$	
S ₁₁	$P \wedge P \leftrightarrow P$	
S ₁₂	$R \vee (P \wedge \neg P) \leftrightarrow R$	
S ₁₃	$R \wedge (P \vee \neg P) \leftrightarrow R$	
S ₁₄	$R \vee (P \vee \neg P) \leftrightarrow 1$	
S ₁₅	$R \wedge (P \wedge \neg P) \leftrightarrow 0$	
S ₁₆	$P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$	
S ₁₇	$\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
S ₁₈	$P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	
S ₁₉	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	
S ₂₀	$\neg(P \neq Q) \leftrightarrow P \neq \neg Q$	

- 3 -

Jadual 2: Kesetaraan (sambungan)

S ₂₁	$P \neq Q \iff (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
S ₂₂	$(P \neq Q) \iff (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
S ₂₃	$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \iff (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$
S ₂₄	$(x)(A(x) \wedge B(x)) \iff (x)A(x) \wedge (x)B(x)$
S ₂₅	$\neg(\exists x)A(x) \iff (x)\neg A(x)$
S ₂₆	$\neg(x)A(x) \iff (\exists x)\neg A(x)$
S ₂₇	$(x)(A \vee B(x)) \iff A \vee (x)B(x)$
S ₂₈	$(\exists x)(A \wedge B(x)) \iff A \wedge (\exists x)B(x)$
S ₂₉	$(x)A(x) \rightarrow B \iff (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$
S ₃₀	$(\exists x)A(x) \rightarrow B \iff (x)(A(x) \rightarrow B)$
S ₃₁	$A \rightarrow (x)B(x) \iff (x)(A \rightarrow B(x))$
S ₃₂	$A \rightarrow (\exists x)B(x) \iff (\exists x)(A \rightarrow B(x))$
S ₃₃	$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \iff (x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$
S ₃₄	$(\exists x)A(x) \rightarrow (x)B(x) \iff (x)(A(x) \rightarrow B(x))$

PETUA UNTUK MEMBUKTIKAN TEOREM SECARA AUTOMATIK

Petua Anteseden:

Petua $\neg \Rightarrow$: Jika $\alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, \neg X, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\wedge \Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \wedge Y, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\vee \Rightarrow$: Jika $X, \alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan juga $Y, \alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$, maka $\alpha, X \vee Y, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\rightarrow \Rightarrow$: Jika $Y, \alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan juga $\alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} X, \gamma$, maka $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua $\nrightarrow \Rightarrow$: Jika $X, Y, \alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$ dan $\alpha, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} X, Y, \gamma$, maka $\alpha, X \nrightarrow Y, \beta \stackrel{u}{\Rightarrow} \gamma$.

Petua Akibat:

Petua $\Rightarrow \neg$: Jika $X, \alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} \beta, \gamma$, maka $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} \beta, \neg X, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \wedge$: Jika $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$ dan juga $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} \beta, X \wedge Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \vee$: Jika $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} X, Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} \beta, X \vee Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \rightarrow$: Jika $X, \alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$, maka $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} \beta, X \rightarrow Y, \gamma$.

Petua $\Rightarrow \nrightarrow$: Jika $X, \alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} Y, \beta, \gamma$ dan juga $Y, \alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} X, \beta, \gamma$,
maka $\alpha \stackrel{u}{\Rightarrow} \beta, X \nrightarrow Y, \gamma$

PETUA PENTAABIRAN DALAM SISTEM BUKTI FORMAL

1.a	$\wedge - K : \frac{A_1, \dots, A_n}{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}$
1.b	$\wedge - H : \frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}{A_i}$
2.a	$\vee - K : \frac{A_i}{A_1 \vee \dots \vee A_n}$
2.b	$\vee - H : \frac{A_1 \vee \dots \vee A_n, A_1 \rightarrow A, \dots, A_n \rightarrow A}{A}$
3.a	$\neg - K : \frac{\text{Dari } A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{\neg A}$
3.b	$\neg - H : \frac{\text{Dari } \neg A \text{ taabirkan } A_1 \wedge \neg A_1}{A}$
4.a	$\rightarrow - K : \frac{\text{Dari } A_1, \dots, A_n \text{ taabirkan } A}{(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A}$
4.b	$\rightarrow - H : \frac{A_1 \rightarrow A_2, A_1}{A_2}$
5.a	$\nabla - K : \frac{A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_1}{A_1 \nabla A_2}$
5.b	$\nabla - H : \frac{A_1 \nabla A_2}{A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_1}$
6.a	(IF-THEN-ELSE)-K : $\frac{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow C}{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}$
6.b	(IF-THEN-ELSE)-H : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{A \rightarrow B} \\ \frac{(\text{IF } A \text{ THEN } B \text{ ELSE } C)}{\neg A \rightarrow C} \end{array} \right.$
7.	Petua Ketransitifan : $\frac{A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3}{A_1 \rightarrow A_3}$
8.	Petua Penggantian : $\frac{A_1 \nabla A_2, A(A_1)}{A(A_2)}$

PETUA PENTAABIRAN BAGI BUKTI KETEPATAN PROGRAM

	$\frac{Q_1 \{S_1\} Q_2, Q_2 \{S_2\} Q_3}{Q_1 \{S_1; S_2\} Q_3}$	(Petua Pengubahan)
1.a	$\frac{Q_1 \rightarrow Q_2, Q_2 \{S\} Q_3}{Q_1 \{S\} Q_3}$	} (Petua Akibat)
2.b	$\frac{Q_1 \{S\} Q_2, Q_2 \rightarrow Q_3}{Q_1 \{S\} Q_3}$	
3.	$\frac{(Q_1 \wedge \text{syarat}) \{S\} Q_2, (Q_1 \wedge \neg \text{syarat}) \rightarrow Q_2}{Q_1 \text{ (IF syarat THEN S) } Q_2}$	(Petua IF-THEN)
4.	$\frac{(Q_1 \wedge \text{syarat}) \{S_1\} Q_2, (Q_1 \wedge \neg \text{syarat}) \{S_2\} Q_2}{Q_1 \text{ (IF syarat THEN } S_1 \text{ ELSE } S_2) Q_2}$	(Petua IF-THEN-ELSE)
5.	$\frac{(Q \wedge \text{syarat}) \{S\} Q}{Q \text{ (WHILE syarat DO S) } (Q \wedge \neg \text{syarat})}$	(Petua Pelelaran)

AKSIOM UMPUKAN

1. Untuk Pembinaan ke depan:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \{x_i := U(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

$$(\exists y) (A(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \wedge x_i = U(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n))$$
2. Untuk Pembinaan ke belakang:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, U(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$\{x_i := U(x_1, x_2, \dots, x_n)\} A(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 7 -

IDENTITI BERKENAAN SET & KESETARAAN BERKENAAN PERNYATAAN	
Aljabar Set	Aljabar Pernyataan
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	<p>Hukum idempoten</p> $P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$ (1)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	<p>Hukum kalis sekutuan</p> $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ (2)
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	<p>Hukum kalis tukar tertib</p> $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ (3)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	<p>Hukum kalis taburan</p> $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (4)
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap S = A$	$P \vee 0 \Leftrightarrow P$ $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$ (5)
$A \cup S = S$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$P \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ (6)
$A \cup \bar{A} = S$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$	$P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$ $P \vee \neg P \Leftrightarrow 0$ (7)
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	<p>Hukum penyerapan</p> $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ (8)
$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{\emptyset} = S$ $\overline{S} = \emptyset$ $\overline{(\bar{A})} = A$	<p>Hukum De Morgan</p> $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg 0 \Leftrightarrow 1$ $\neg 1 \Leftrightarrow 0$ $\neg \neg P \Leftrightarrow P$ (9)
	$\neg 0 \Leftrightarrow 1$ $\neg 1 \Leftrightarrow 0$ (10)
	$\neg \neg P \Leftrightarrow P$ (11)

