UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 211 – Kalkulus Lanjutan

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

...2/-

1. (a) Fungsi-fungsi u(x, y) dan v(x, y) diberikan seperti berikut:

$$x^2 + y^2 + 2u^2 + 3v^2 - 7 = 0$$

$$2x^2 - 3y^2 + 3uv - 2 = 0.$$

Cari

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

(ii) $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

(30 markah)

(b) Kelaskan titik genting bagi fungsi

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$$

dan cari nilai ekstremum tempatannya jika wujud.

(35 markah)

(c) Dengan menggunakan kaedah Lagrange, cari titik dan nilai ekstremum bagi fungsi

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 1$$

pada rantau $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$.

(35 markah)

2. (a) (i) Selesaikan $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$.

(ii) Cari nilai $\displaystyle\iint_A 2x\, dx\, dy$.

Di sini A adalah rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = e^x$, garis $x = 0$, $x = 2$ dan $y = 0$.

(50 markah)

...3/-

(b) (i) Cari nilai $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} 2\,xyz\,dz\,dy\,dx$.

(ii) Lakarkan bongkah bagi

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \le 3z^2, 0 \le z \le 1\}.$$

Cari jisim bongkah itu jika ketumpatannya adalah suatu pemalar α.

(50 markah)

3. (a) Tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu atau mencapah:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n} - 1}{n^2 + 2\sqrt{n}}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(iv) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ell n\, k}$

(v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k(k+1)}$.

(60 markah)

(b) Cari polinomial Taylor $P_4(x)$ dan baki $R_5(x)$ (bentuk Lagrange) dalam kuasa-kuasa $x - a$ bagi fungsi

$$f(x) = x\,e^{-2x}, \quad a = 1.$$

(40 markah)

...4/-

4. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan secara rekursi seperti berikut:

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}, \; n \geq 1$$

(i) Tunjukkan $\{a_n\}$ adalah menokok

(ii) Tunjukkan bahawa $a_n < 3, \; \forall \, n \in \mathbb{N}$.

(iii) Adakah $\{a_n\}$ menumpu?

Beri alasan anda. Jika ia menumpu cari hadnya.

(60 markah)

(b) Tunjukkan bahawa $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ memenuhi kriterium Cauchy manakala $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$, n = 1, 2, 3, ... tidak memenuhi kriterium Cauchy.

(40 markah)

5. (a) Dapatkan siri kuasa bagi $(1 + x^2)^{-1/2}$. Seterusnya, tunjukkan bahawa

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \ldots$$

(40 markah)

(b) Diberi jujukan

$$f_n(x) = x^n.$$

(i) Dapatkan f(x)

(ii) Cari $\sup\limits_{0 \leq x \leq 1} | f_n(x) - f(x) |$

(iii) Tunjukkan bahawa jujukan ini menumpu secara seragam dalam selang $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$

(iv) Adakah jujukan ini menumpu secara seragam dalam selang [0, 1]?

(60 markah)

...5/-

Lampiran

1. (a) $$\frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

(b) $F(x, y, u, v) = 0$
$G(x, y, u, v) = 0$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

(c) $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

(d) $x = \rho \sin\phi \cos\theta$
$y = \rho \sin\phi \sin\theta$
$z = \rho \cos\phi$

(e) $$M = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\, f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{M}$$

- ooo0ooo -