

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
Academic Session 2008/2009

November 2008

**MGM 502 – Number Theory**  
***[Teori Nombor]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all three** [3] questions.

**[Arahan:** Jawab **semuah tiga** [3] soalan.]

1. (a) Use the Euclidean Algorithm to obtain integers  $x$  and  $y$  satisfying

$$\gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$$

- (b) Consider the problem of purchasing RM510 postal orders using RM20 and RM50 postal orders. How many of each type of postal order should be used? Find all the possible combinations.
- (c) Define a multiplicative function. Show that the function  $\frac{\tau(n)}{n}$  is a multiplicative function.
- (d) Find  $\sigma(450)$  and  $\tau(450)$ .
- (e) Use mathematical induction to show that
- $$\sum_{j=1}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$
- (f) Define a perfect number. Show that the integer  $n = 2^{10}(2^{11} - 1)$  is not a perfect number.

[100 marks]

2. (a) Define Mersenne number. If  $p$  is an odd prime, then any divisor of the Mersenne number,  $M_p = 2^p - 1$  is of form  $2kp + 1$ , where  $k$  is a positive integer. Use this statement to show that  $M_{23}$  is a composite.
- (b) Using The Lucas- Lehmer Test, determine whether the Mersenne number  $M_{13}$  is a Mersenne prime.
- (c) Given the linear congruence  $140x \equiv 133 \pmod{301}$ . Determine how many solutions does this congruence has. Give reasons. Next, find all solutions of the given linear congruence.
- (d) Solve the following simultaneous linear congruences,
- $$x \equiv 5 \pmod{11}; \quad x \equiv 14 \pmod{29}; \quad x \equiv 15 \pmod{31}$$
- (e) If  $a \equiv b \pmod{n}$ , then show that  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$  for any positive integer  $k$ .

[100 marks]

1. (a) *Gunakan algoritma Euclidean untuk memperolehi penyelesaian  $x$  dan  $y$  yang memenuhi*

$$\gcd(1769, 2378) = 1769x + 2378y$$

- (b) *Pertimbangkan keadaan di mana anda ingin membeli wang pos sebanyak RM510 menggunakan wang pos RM20 dan RM50. Berapakah setiap wang pos yang digunakan:*

- (c) *Takrifkan fungsi multiplikatif. Tunjukkan bahawa fungsi  $\frac{\tau(n)}{n}$  adalah multiplikatif.*

- (d) *Dapatkan  $\sigma(450)$  dan  $\tau(450)$ .*

- (e) *Gunakan induksi matematik untuk menunjukkan bahawa*

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1) / 6$$

- (f) *Takrifkan nombor sempurna. Tunjukkan bahawa  $n = 2^{10}(2^{11} - 1)$  adalah bukan nombor sempurna.*

[100 markah]

2. (a) *Takrifkan nombor Mersenne. Jika  $p$  nombor perdana ganjil, maka sebarang pembahagi kepada nombor Mersenne  $M_p = 2^p - 1$  adalah berbentuk  $2kp + 1$ , di mana  $k$  adalah integer positif. Menggunakan kenyataan ini, tunjukkan  $M_{23}$  adalah nombor komposit.*

- (b) *Menggunakan teknik Lucas-Lehmer, tentukan samada nombor Mersenne  $M_{13}$  adalah nombor perdana mersenne.*

- (c) *Diberikan kongruen linear  $140x \equiv 133 \pmod{301}$ . Tentukan berapa penyelesaian kepada linear kongruen ini. Nyatakan sebabnya, seterusnya dapatkan semua penyelesaian linear kongruen ini.*

- (d) *Selesaikan kongruen linear serentak berikut,*

$$x \equiv 5 \pmod{11}; \quad x \equiv 14 \pmod{29}; \quad x \equiv 15 \pmod{31}$$

- (e) *Tunjukkan bahawa jika  $a \equiv b \pmod{n}$ , maka  $a^k \equiv b^k \pmod{n}$  untuk sebarang integer positif  $k$ .*

[100 markah]

3. (a) Solve the following quadratic congruence.

$$3x^2 + 9x + 7 \equiv 0 \pmod{13}$$

- (b) Find all the quadratic residues of 11.

- (c) Define a Legendre symbol. If  $a \equiv b \pmod{p}$  then show that  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ ,  
where  $a, b$  integers that are relatively prime to an odd prime  $p$ .

- (d) What is the ciphertext that is produced when RSA encryption with key  $(e, n) = (3, 2669)$  is used to encrypt the message "BEST WISHES" ?

[100 marks]

3. (a) Selesaikan kongruen kuadratik berikut.

$$3x^2 + 9x + 7 \equiv 0 \pmod{13}$$

(b) Dapatkan semua residu kuadratik bagi 11.

(c) Takrifkan simbol Legendre. Jika  $a \equiv b \pmod{p}$  tunjukkan bahawa

$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ , di mana  $a, b$  adalah integer yang secara relatifnya adalah perdana kepada nombor perdana  $p$ .

(d) Apakah teks cipter yang dihasilkan apabila enkripsi RSA dengan kunci  $(e, n) = (3, 2669)$  digunakan untuk enkripsi mesej "BEST WISHES" ?

[100 markah]