
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2008/2009

November 2008

MAA 111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all twelve** [12] questions.

Arahan : Jawab **semua dua belas** [12] soalan.]

1. (a) Explain why any homogenous system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ always has a solution even when A^{-1} does not exist.
 (b) What can you conclude about A if the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has a unique solution?
 (c) What can you conclude about A if the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has infinitely many solutions?

[6 marks]

2. Given a system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with the following sets of data. Determine whether there exists a unique solution, no solution, or infinitely many solutions.

- (a) A is a 5×6 matrix, $\text{rank}(A) = 4$ and $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 4$
 (b) A is a 4×2 matrix, $\text{rank}(A) = 4$ and $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 4$
 (c) A is a 5×5 matrix, $\text{rank}(A) = 4$ and $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 5$

[6 marks]

3. If A is an $n \times n$ matrix and the homogeneous system $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ has a unique solution what can you say about the dimension of the row space and the column space of A ? Justify your answer.

[4 marks]

4. If you have 5 vectors in \mathbb{R}^5 which are linearly independent, can you always conclude they span \mathbb{R}^5 ? Justify your answer.

[2 marks]

5. If you have a 3×3 matrix A with eigenvalues $-1, 1, 5$, can you conclude that A is automatically diagonalizable? Justify your answer.

[2 marks]

6. Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Find the eigenvalues of A
 (b) Find a basis for each eigenspace of A
 (c) Find an invertible matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$
 (d) Find a matrix B such that $B^{1,000,001} = A$.

[20 marks]

...3/-

1. (a) Jelaskan kenapa suatu sistem homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sentiasa mempunyai satu penyelesaian walaupun A^{-1} tak wujud.
 (b) Apakah yang anda dapat simpulkan tentang A jika sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian unik?
 (c) Apakah yang anda dapat simpulkan tentang A jika sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian tak terhingga?

[6 markah]

2. Diberi satu sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan set data berikut. Tentukan sama ada wujud penyelesaian unik, tiada penyelesaian atau penyelesaian tak terhingga.

- (a) A ialah matriks 5×6 , $\text{rank}(A) = 4$ dan $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 4$
 (b) A ialah matriks 4×2 , $\text{rank}(A) = 4$ dan $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 4$
 (c) A ialah matriks 5×5 , $\text{rank}(A) = 4$ dan $\text{rank}(A|\mathbf{b}) = 5$

[6 markah]

3. Jika A ialah matriks $n \times n$ dan sistem homogen $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian unik, apakah yang anda dapat nyatakan tentang dimensi ruang baris dan ruang lajur untuk A ? Jelaskan jawapan anda.

[4 markah]

4. Jika anda mempunyai 5 vektor tak bersandar linear dalam \mathbb{R}^5 , bolehkah anda sentiasa membuat kesimpulan bahawa mereka merentang \mathbb{R}^5 ? Jelaskan jawapan anda.

[2 markah]

5. Jika anda mempunyai matriks 3×3 A dengan nilai eigen $-1, 1, 5$, bolehkah anda membuat kesimpulan bahawa A adalah terpepenjuran secara automatik? Jelaskan jawapan anda.

[2 markah]

6. Pertimbangkan matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Cari nilai eigen untuk A
 (b) Cari satu asas untuk setiap ruang eigen untuk A
 (c) Cari satu matriks tersongsangan P and satu matriks pepenjuru D sedemikian $P^{-1}AP = D$.
 (d) Cari satu matriks B sedemikian $B^{1,000,001} = A$.

[20 markah]

...4/-

7. Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

- (a) For what vectors $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ is the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent?
 (b) Find bases for each of the four fundamental spaces: Row (A), Col (A), Null(A), Null(A^T).
 (c) Find the values of rank (A) and nullity (A)?

[20 marks]

8. Describe the method to convert an arbitrary basis $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ of the inner product space \mathbb{R}^n into an orthonormal basis.

[4 marks]

9. Find an orthonormal basis for the solution space of the following system

$$5x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 0$$

$$4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$$

[4 marks]

10. Suppose $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be defined by $T(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$. Can you find a non-zero vector \mathbf{u} in \mathbb{R}^2 such that $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$? Justify your answer.

[4 marks]

11. (a) What does it mean for a vector \mathbf{u} to be called a least squares solution of a linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ of m equations in n variables.
 (b) Explain why the solution \mathbf{y} for the system $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ is the least squares solution for the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 (c) When would you get a unique least squares solution?

[10 marks]

12. (a) Use least squares method to find the equation of the line that will best approximate the points $(-3, 70), (1, 21), (-7, 110), (5, -35)$.
 (b) Compute the error for your solution in part (a).
 (c) Find the orthogonal projection of the vector $\mathbf{u} = (70, 21, 110, -35)$ on the subspace of \mathbb{R}^4 spanned by the vectors $\mathbf{v}_1 = (-3, 1, -7, 5), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$.

[18 marks]

...5/-

7. Pertimbangkan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

- (a) Apakah vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ supaya sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah konsisten?
 (b) Cari asas-asas untuk setiap daripada empat ruang asasi:
 $\text{Row}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{Null}(A)$, $\text{Null}(A^T)$.
 (c) Cari nilai untuk $\text{rank}(A)$ dan nullity (A) ?

[20 markah]

8. Perihalkan kaedah untuk menukar sebarang asas $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ untuk ruang hasil darab terkedalam \mathbb{R}^n kepada satu asas ortonormal.

[4 markah]

9. Cari satu asas ortonormal untuk ruang penyelesaian sistem berikut:

$$5x_1 + 2x_2 + 7x_4 = 0$$

$$4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$$

[4 markah]

10. Andaikan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ditakrif sebagai $T(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$. Bolehkah anda cari suatu vektor tak sifar \mathbf{u} dalam \mathbb{R}^2 sedemikian $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$? Jelaskan jawapan anda.

[4 markah]

11. (a) Apakah maksud suatu vektor \mathbf{u} disebut sebagai penyelesaian kuasa dua terkecil untuk suatu sistem linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan m persamaan dalam n pemboleh ubah.
 (b) Jelaskan kenapa penyelesaian untuk $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ ialah penyelesaian kuasa dua terkecil untuk sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 (c) Bilakah anda akan mendapat penyelesaian kuasa dua terkecil yang unik?

[10 markah]

12. (a) Gunakan kaedah kuasa dua terkecil untuk mencari persamaan garis lurus yang akan memberi anggaran terbaik untuk titik-titik $(-3, 70), (1, 21), (-7, 110), (5, -35)$.

(b) Hitung ralat untuk penyelesaian anda di bahagian (a).

(c) Cari unjuran ortogon untuk vektor $\mathbf{u} = (70, 21, 110, -35)$ pada subruang dalam \mathbb{R}^4 yang direntang oleh vektor-vektor $\mathbf{v}_1 = (-3, 1, -7, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 1)$.

[18 markah]