UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2005/2006

November 2005

IUK 191E – Mathematics I
[Matematik I]

Duration: 3 hours
[Masa: 3 jam]

Please check that this examination paper consists of <u>ELEVEN</u> (11) pages of printed material before you begin the examination.

Answer **FIVE (5)** questions. All questions can be answered either in Bahasa Malaysia or English.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi <u>SEBELAS</u> (11) muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

*Jawab **LIMA (5)** soalan. Semua soalan boleh dijawab dalam Bahasa Malaysia atau Bahasa Inggeris].*

1. (a) (i) Evaluate the limit for the function $\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(2 marks)

(ii) Evaluate $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ for the function f(x) = ln x

(Hint: $\lim_{h \to 0} (1 + \frac{1}{h})^h = \infty$ and let $\frac{1}{h} = \frac{\Delta x}{x}$)

(3 marks)

(b) (i) Find constants A and B so that the following function f(x) will be continuous for all x:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - Ax - 6}{x - 2} & \text{if } x > 2 \\ x^2 + B & \text{if } x \leq 2 \end{cases}$$

(5 marks)

(ii) Let $f(x) = -x^4 + x^2 + A$ for constant A. What value of A should be chosen that guarantees if $x_0 = \frac{1}{3}$ is chosen as the initial estimate, the Newton – Raphson method produces $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0, \ldots$

(5 marks)

(c) (i) Find the standard form of the equation for the tangent line to the curve $y = \frac{\sin x}{x}$ at the point $x = \frac{\pi}{4}$.

(2 marks)

(ii) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = x^2 y^2 \sqrt{4 - x^3}$

(3 marks)

2. (a) A bucket containing 5 liters of water has a leak. After t seconds, there are

$$Q(t) = 5\left(1 - \frac{t}{25}\right)^2$$

liters of water in the bucket.

(i) At what rate (to the nearest hundredth liter) is water leaking from the bucket after 2 seconds?

(3marks)

(ii) How long does it take for all the water to leak out of the bucket?

(2 marks)

(iii) At what rate is the water leaking when the last drop leaks out?

(3 marks)

(b) Let f be a function for which $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(i) If g(x) = f(3x-1), what is $g'(x)$

(2 marks)

(ii) If h(x) = $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, what is $h'(x)$?

(2 marks)

(c) Find $\dfrac{dy}{dx}$ if y = $\sqrt{x}\sin^{-1}(3x+2)$

(2 marks)

(d) A particle moves along the x-axis so that its velocity at any time $t \geq 0$ is given by $v(t) = 6t^2 - 2t - 4$. It is known that the particle is at position x = 6 for t = 2.

(i) Write a polynomial expression for the position of the particle at any time $t \geq 0$

(2 marks)

(ii) For what values of t, $0 \leq t \leq 3$ is the particle's instantaneous velocity the same as its average velocity on the interval [0,3]?

(2 marks)

(iii) Find the total distance traveled by the particle from time t = 0 to t = 3?

(2 marks)

3. (a) (i) Find the critical numbers for the function $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)$, $a > b$

Classify each as a relative maximum, a relative minimum, or neither.

(3 marks)

(ii) Find $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$

(2 marks)

(iii) Find $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x} dx$

(2 marks)

(b) (i) Find the volume of the solid formed by revolving about the y-axis the region bounded by the curve

$y = \frac{1}{1+x^4}$ between x = 0 and x = 4.

(3 marks)

(ii) Find the surface area of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y = e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ on the [0,1] about the x-axis.

(3 marks)

(c) (i) Find the general solution of the differential equation for

$xy\,dx + \sqrt{xy}\,dy = 0$

(3 marks)

(ii) A scientist has discovered a radioactive substance that disintegrates in such a way that at time t, the rate of disintegration is propotional to the square of the amount present. If a 100g sample of the substance dwindles to only 80 g in 1 day, how much will be left after 6 days? When will only 10 g be left?

(4 marks)

4. (a) Find the particular solution of the differential equation for;

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x} = x(1+x) \qquad \text{with } y = -1 \text{ when } x = 0$$

(10 marks)

(b) The graph function f consists of a semicircle of radius 3 and two line segments as shown in the figure below;
Let F be the function defined by,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(i) Find F(7)

(2 marks)

(ii) Find all values on the interval (-3,12) at which F has a relative maximum

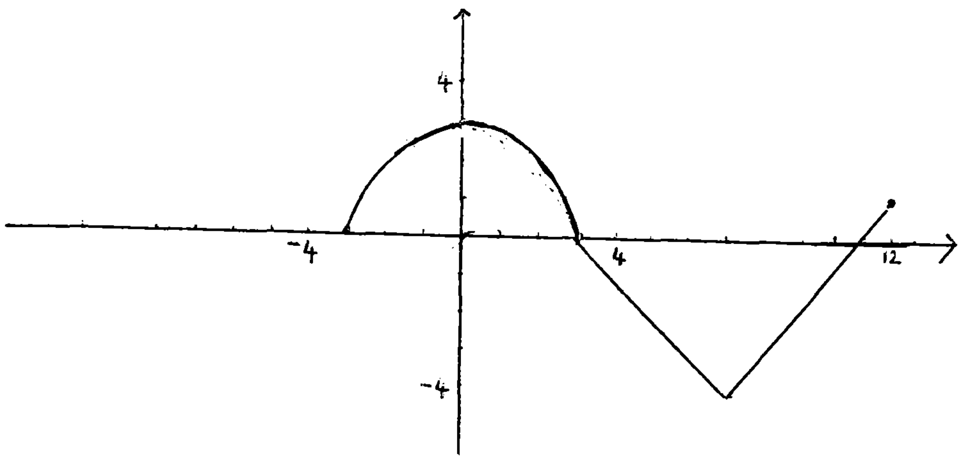
(3 marks)

(iii) Write an equation for the line tangent to the graph of F at x = 7

(2 marks)

(iv) Find the x-coordinate of each point of inflection of graph on F on the interval (-3,12)

(3 marks)



5. (a) The standard equation for a straight line in a plane is ax+by+c=0. Two points determine a straight line. Find the equation of the straight line that passes through two points (1,2) and (5,7).
[Do not use the method you learned in geometry coordinate. Use the fact that homogeneous system has the solution $\bar{x} = \bar{0}$ if and only if $|A| = 0$]

(10 marks)

(b) A company has factories in Penang and Johor which produces computer desks and printer desks. The productions in units for the month of February and January is given in matrix J and F respesctively

$$J = \begin{array}{cc} \textit{Penang} & \textit{Johor} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1500 & 1650 \\ 850 & 700 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{array}{cc} \textit{Penang} & \textit{Johor} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1700 & 1810 \\ 930 & 740 \end{bmatrix}$$

(i) Find the average production for the month of January and February

(3 marks)

(ii) Determine the increase in production from January to February

(3 marks)

(iii) Determine $J = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and give an explanation for the matrix produced.

(4 marks)

1. (a) (i) Kirakan had bagi fungsi $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

(2 markah)

(ii) Guna $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ untuk mengira fungsi f(x) = ln x

(Petunjuk: $\lim_{h\to 0}(1+\frac{1}{h})^h = \infty$ dan biar $\frac{1}{h} = \frac{\Delta x}{x}$)

(3 markah)

(b) (i) Cari pemalar A dan B supaya fungsi f(x) adalah selanjar bagi semua x:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - Ax - 6}{x-2} & \text{if } x > 2 \\ x^2 + B & \text{if } x \le 2 \end{cases}$$

(5 markah)

(ii) Biar $f(x) = -x^4 + x^2 + A$ bagi pemalar A. Apakah nilai A yang sepatut diplih untuk memastikan jika $x_0 = \frac{1}{3}$ dipilih sebagai anggaran awal, kaedah Newton-Raphson akan menghasilkan $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0$, $x_3 = -x_0, \ldots$

(5 markah)

(c) (i) Cari persamaan piawai bagi garis tangen pada lengkung $y = \frac{\sin x}{x}$ pada titik $x = \frac{\pi}{4}$.

(2 markah)

(ii) Selesaikan persamaan pembezaan $\frac{dy}{dx} = x^2 y^2 \sqrt{4 - x^3}$

(3 markah)

2. (a) Sebuah baldi yang bocor mengandungi 5 liter air. Selepas t saat, air yang tinggal didalam baldi ialah

$$Q(t) = 5\left(1 - \frac{t}{25}\right)^2$$

(i) Pada kadar berapakah (peperatus liter yang hampir), air keluar daripada baldi selepas 2 saat?

(3 markah)

(ii) Berapa lamakah yang diambil untuk semua air itu keluar daripada baldi?

(2 markah)

(iii) Apakah kadar air yang keluar daripada baldi apabila titisan terakhir mengalir keluar?

(3 markah)

(b) Biar f ialah fungsi dimana $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(i) Jika g(x) = f(3x-1), cari $g'(x)$

(2 markah)

(ii) Jika h(x) = $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, cari $h'(x)$?

(2 markah)

(c) Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ jika y = $\sqrt{x}\sin^{-1}(3x+2)$

(2 markah)

(d) Suatu zarah bergerak diatas paksi x dimana halaju pada sebarang masa $t \geq 0$ diberi oleh v(t) = $6t^2 - 2t - 4$. Diketahui bahawa kedudukan zarah ialah pada x = 6 apabila t = 2

(i) Tuliskan pernyataan polinimial bagi kedudukan zarah pada sebarang masa $t \geq 0$

(2 markah)

(ii) Bagi nilai t, $0 \leq t \leq 3$, tentukan sama ada halaju seketika zarah sama dengan halaju purata dalam selang [0,3]

(2 markah)

(iii) Cari jumlah jarak yang dilalui zarah dari t = 0 ke t = 3.

(2 markah)

3. (a) (i) Dapatkan titik-titik genting untuk fungsi dibawah,

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right), \quad a > b$$

Klasifikasikan setiap titik genting kepada maksimum tempatan atau minimum tempatan atau bukan kedua-duanya.

(3 markah)

(ii) Tentukan $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$

(2 markah)

(iii) Tentukan $\int \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x} dx$

(2 markah)

(b) (i) Cari isipadu yang dibatasi oleh lengkung $y = \frac{1}{1+x^4}$ yang terjana melalui putaran pada paksi y antara x = 0 dan x = 4

(3 markah)

(ii) Cari luas permukaan yang dibatasi oleh lengkung $y = e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ yang dijana oleh putaran pada [0,1]

(3 markah)

(c) (i) Cari penyelesaian am untuk persamaan pembezaan $xy\,dx + \sqrt{xy}\,dy = 0$

(3 markah)

(ii) Seorang saintis telah menemui satu bahan radioaktif yang mula reput sehingga pada satu masa t, kadar pereputan berkadar langsung dengan kuasa dua jumlah yang sedia ada. Sekiranya 100g sampel bahan radioaktif mereput kepada 80g dalam masa satu hari,berapakah jumlah yang tinggal selepas 6 hari? Bilakah hanya 10g yang tinggal?

(4 markah)

4. (a) Dapatkan penyelesaian khusus untuk persamaan pembezaan berikut;

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x} = x(1+x) \qquad \text{with } y = -1 \text{ when } x = 0$$

(10 markah)

(b) Graf fungsi f terdiri daripada sebuah semi bulatan dengan jejari 3 dan 2 garisan segmen seperti yang ditunjukkan pada rajah dibawah. Fungsi F adalah seperti berikut;

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

(i) Cari nilai $F(7)$

(2 markah)

(ii) Cari semua nilai pada selang (-3,12) dimana F mempunyai maksimum tempatan

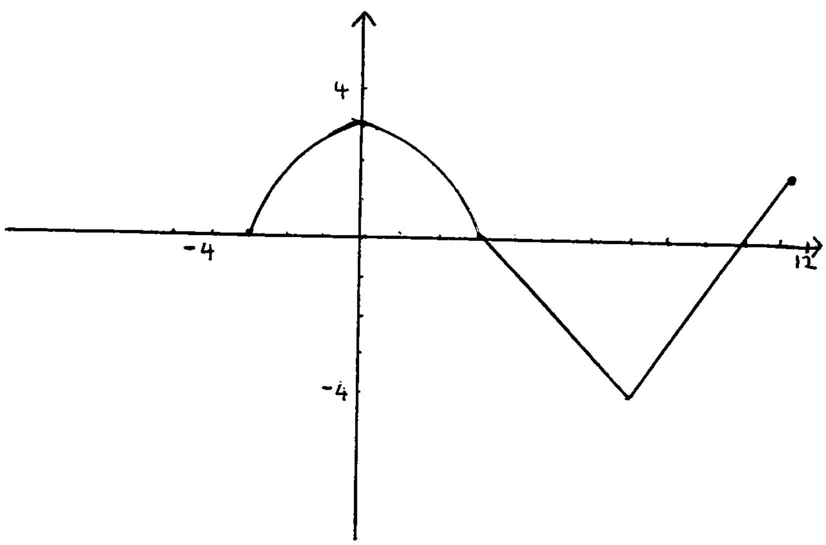
(3 markah)

(iii) Tuliskan persamaan untuk garisan tangen kepada graf F pada x = 7

(2 markah)

(iv) Cari koordinat x pada setiap titik lengkok balas pada selang (-3,12)

(3 markah)



1. *Pilih jawapan yang betul*

   (i) *Apakah jenis data bagi bilangan ketidakhadiran setiap tahun bagi seseorang pekerja?*

      (a) *nominal*
      (b) *diskrit*
      (c) *qualitatif*
      (d) *selanjar*

   (ii) *Apakah sempadan bagi 8.6-8.8?*

      (a) *8-9*
      (b) *8.55-8.85*
      (c) *8.5-8.9*
      (d) *8.65-8.75*

   (iii) *Bila data dikategorikan, sebagai contoh, tempat tinggal (luar bandar, pinggir bandar, bandar), ukuran yang sesuai untuk sukatan memusat ialah*

      (a) *min*
      (b) *mod*
      (c) *median*
      (d) *julat tengah*

   (iv) *Bila sesuatu taburan itu berbentuk loceng, dianggarkan berapa peratuskah data yang akan berada sekitar 1 sisihan piawai daripada min?*

      (a) *50%*
      (b) *68%*
      (c) *95%*
      (d) *99.7%*

   (v) *Apabila selang keyakinan 99% dikira sebagai ganti kepada selang keyakinan 95% dengan bilangan n yang sama, julat maksimum ialah*

      (a) *semakin besar*
      (b) *semakin kecil*
      (c) *sama*
      (d) *tidak boleh ditentukan*

(20 markah)

2. (a) *Skor manakah yang mempunyai kedudukan relatif tertinggi?*

   (i) $X = 12$ $\quad \overline{X} = 10$ $\quad S^2 = 16$

   (ii) $X = 180$ $\quad \overline{X} = 60$ $\quad S^2 = 64$

   (b) *Dengan menggunakan taburan normal piawai, cari* $p(-1.87 < z < 0)$.

(20 markah)

3. (a) *Jika dianggarkan 2% daripada 200 orang yang berada didalam satu bilik adalah kidal, cari kebarangkalian tepat lima orang adalah kidal.*

   (b) *Tentukan jika taburan yang diberi mewakili satu taburan kebarangkalian, jika tidak beri sebab.*

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-2}{7}$

(20 markah)

4. (a) *Seorang pesakit yang maradang mengadu bahawa kos berjumpa dengan doktor adalah tinggi. Secara rawak, beliau membuat tinjauan 20 pesakit lain dan didapati bahawa min bagi jumlah wang yang dibelanjakan bagi setiap perjumpaan dengan doktor ialah \$44.8. sisihan piawai sampel ialah \$12.4609. Cari selang keyakinan 95% bagi min populasi. Anggap pembolehubah tertabur secara normal.*

   (b) *Seorang instruktor ingin melihat sama ada sisihan skor bagi 23 pelajar didalam kelasnya kurang daripada sisihan populasi. Sisihan kelas ialah 198. Adakah cukup bukti untuk menyokong dakwaan bahawa pelajarnya adalah kurang dari sisihan populasi* $(\sigma^2 = 225)$ *pada* $\alpha = 0.05$? *Anggap skor tertabur secara normal.*

(20 markah)

5. (a) *Bagi data berikut*

Bulan x	*1*	*3*	*6*	*8*	*10*	*12*	*15*
Bil barang yang dijual y	*10*	*12*	*15*	*19*	*20*	*21*	*21*

1- Lukiskan plot sebaran
2- Cari persamaan garis regresi.
3- Penentuan koefisien

(b) *Seorang pekerja yang berpangkat ingin melihat jika terdapat perbezaan yang signifikan didalam bilangan pekerja dipersimpangan tiga jalan bertol dinegeri itu.. Data berikut adalah seperti dibawah. Pada* $\alpha = 0.05$*, bolehkah disimpulkan bahawa terdapat perbezaan signifikan didalam purata bilangan pekerja di setiap persimpangan?*

Road 1	*Road 2*	*Road 3*
7	*10*	*1*
14	*1*	*12*
32	*1*	*1*
19	*0*	*9*
10	*11*	*1*
11	*1*	*11*

(20 markah)

-ooo000ooo-