UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1999/2000

Februari 2000

ZCT 304/3 -Keelektrikan dan Kemagnetan

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana ENAM soalan. Calon-calon boleh memilih menjawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia. Jika calon-calon memilih untuk menjawab dalam Bahasa Inggeris, sekurangnya satu soalan wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

Semua formula untuk rujukan diberikan di akhir kertas soalan ini.

1. (a) Tulis persamaan-persamaan Maxwell bagi vakum dalam bentuk pembezaan dengan memberikan takrifan yang teliti terhadap semua kuantiti-kuantiti yang wujud di dalam persamaan-persamaan tersebut.

(30/100)

(b) Terbitkan persamaan-persamaan berkenaan dalam bentuk kamiran dan bincangkan dengan ringkas makna fizikal setiap persamaan.

(50/100)

(c) Buktikan persamaan keselanjaran bagi cas bermula dengan persamaan-persamaan Maxwell.

(20/100)

2. (a) Takrifkan keupayaan elektrostatik $V(\vec{r})$ dan terbitkan persamaan pembezaan (persamaan Poisson) yang menghubungkan $V(\vec{r})$ dengan ketumpatan cas $\rho(\vec{r})$ di dalam vakum.

(30/100)

...2/-

(b) Satu taburan cas yang simmetrik dan berbentuk sfera diberikan seperti

$$\rho(\mathrm{r}) = \rho_0 \quad \mathrm{r} < \mathrm{R}$$
$$\rho(\mathrm{r}) = 0 \quad \mathrm{r} > \mathrm{R}$$

Kamirkan persamaan Poisson untuk mendapatkan ungkapan $V(r)$ bagi $r < R$ dan $r>R$.

(30/100)

(c) Cari ungkapan untuk medan elektrik $\vec{E}(r)$ dan lakarkan $\vec{E}(r)$ sebagai fungsi r.

(40/100)

3. (a) Bagi magnetostatik, takrifkan vektor keupayaan $\vec{A}(\vec{r})$.

(20/100)

(b) Terangkan apa yang dimaksudkan dengan transformasi Gauge bagi $\vec{A}(\vec{r})$.

(20/100)

(c) Bagi satu gelung dwikutub magnet $\vec{m}$ di titik asalan, $\vec{A}(\vec{r})$ diberikan oleh

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi\ r^3}$$

Terbitkan ungkapan bagi medan magnet $\vec{B}(\vec{r})$.

(20/100)

(d) Tuliskan satu penulisan ringkas, yang mungkin boleh mengandungi beberapa lakaran, berkenaan dengan bentuk $\vec{B}(\vec{r})$ ini.

(40/100)

4. (a) Penyelesaian medan hakiki $\vec{E}_R$ persamaan gelombang Maxwell bagi vakum untuk gelombang yang berambat di arah z boleh ditulis dalam bentuk vektor amplitud kompleks $\vec{E}_0$ iaitu

$$\vec{E}_R = Re\left[\vec{E}_0\, exp(ikz - i\omega t)\right]$$

...3/-

Terangkan dengan menggunakan beberapa rajah jika perlu bagaimana kuantiti-kuantiti k dan ω mempunyai hubungan dengan jarakgelombang dan frekuensi.

(40/100)

(b) Buktikan bahawa $\vec{E}_0$ adalah melintang, $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$.

(20/100)

(c) Nyatakan dengan pembuktian apakah pengkutuban gelombang bagi

(i) $E_{0x} = E_{0y}$ (amplitud dan fasa)

(20/100)

(ii) E_{0x} and E_{0y} $\pi/2$ tak sefasa dan bermagnitud sama.

(20/100)

5. (a) Tuliskan persamaan-persamaan Maxwell bagi medium/bahantara yang am. Gunakannya untuk membuktikan bahawa $\vec{D}$ adalah melintang bagi gelombang bersatah di dalam ruang yang bebas dari sumber (ketumpatan cas dan arus adalah sifar). Terangkan kenapa $\vec{E}$ tidak semestinya melintang di dalam medium/bahantara yang anisotropik.

(40/100)

(b) Takrifkan apa yang dimaksudkan dengan medium yang linear, isotropik dan tak magnetik dan nyatakan perhubungan-perhubungan di antara kuantiti-kuantiti medan elektromagnetnya.

(30/100)

(c) Terbitkan persamaan gelombang bagi gelombang bersatah di ruang yang bebas dari sumber di dalam medium tersebut di atas dan cari halaju gelombang tersebut. Kemudian, dapatkan hubungan di antara indeks biasan dan pemalar dielektrik.

(30/100)

6. (a) Di dalam satu hablur ionik seperti NaCl pemalar dielektriknya berkadarkan frekuensi dan diberikan oleh

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

di mana $\varepsilon_\infty, \omega_L$ dan ω_T adalah pemalar dengan $\omega_L > \omega_T$.

Dapatkan satu ungkapan bagi nilai statiknya $\varepsilon(0)$. Kenalpasti frekuensi-frekuensi di mana $\varepsilon(\omega) \to \infty$ dan $\varepsilon(\omega) = 0$. Cari julat frekuensi di mana $\varepsilon(\omega)$ adalah negatif. Cari had nilai $\varepsilon(\omega)$ apabila $\omega \to \infty$.

(20/100)

(b) Dengan mengambil $\varepsilon_\infty = 2$ dan $\omega_L = 1.5\omega_T$ lakarkan graf $\varepsilon(\omega)$ melawan ω / ω_T.

(30/100)

(c) Tuliskan persamaan yang menghubungkan vektor gelombang k dan ω bagi gelombang bersatah. Gunakan graf $\varepsilon(\omega)$ anda untuk melakarkan graf k melawan ω. (Tunjukkan di mana k hakiki sahaja).

(50/100)

7. (a) Satu sinaran elektromagnet menuju secara tegak lurus ke satah antaramuka di antara dua medium yang isotropik yang mempunyai fungsi dielektrik ε_1 dan ε_2 (kedua-duanya berkemungkinan berfungsikan atau berkadarkan frekuensi). Amplitud gelombang terpantulnya adalah RE_0 di mana E_0 adalah amplitud gelombang tuju dan

$$R = \frac{\varepsilon_1^{1/2} - \varepsilon_2^{1/2}}{\varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2^{1/2}}$$

Buktikan bahawa fungsi kekonduksian σ bagi logam boleh diwakilkan oleh satu fungsi dielektrik $\varepsilon = 1 + i\sigma / \varepsilon_0\omega$ apabila kekonduksiannya sahaja yang menyumbang terhadap ε.

(30/100)

(b) Jika medium 2 adalah logam yang ditakrifkan di atas dan medium 1 adalah vakum, tunjukkan bahawa $\sigma >> \varepsilon_0\omega, |R| \approx 1$. Apakah maksud fisikal keputusan tersebut?

(40/100)

(c) Buktikan bahawa jika $\varepsilon_1 = 1$ dan ε_2 adalah negatif, $|R| = 1$. (Panduan: cari ungkapan untuk magnitud N dan D iaitu ungkapan bahagian atas dan bahagian bawah dalam R).

(30/100)

...5/-

8. (a) Terangkan apa yang dimaksudkan dengan satu logam pandu gelombang. Di bahagian mana spektrum electromagnet pandu gelombang ini boleh digunakan?

(30/100)

(b) Bagi satu gelombang yang bergerak di arah x persamaan perambatannya adalah

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}$$

di mana d adalah lebar pandu gelombang dan n = 1,2,3,... adalah integer. Lakarkan graf-graf untuk menunjukkan bagaimana ω berkadarkan k_x untuk beberapa nilai-nilai n.

(40/100)

(c) Gunakan graf-graf anda untuk menerangkan maksud frekuensi *cut-off* dan maksud kawasan monomod.

(30/100)

Formula-formula untuk rujukan

1. Bagi fungsi bersimmetrik sfera *V(r)* operator Laplacenya adalah

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)$$

2. Jika V adalah satu skalar dan $\vec{S}$ adalah satu vektor,

$$\nabla \times (V\vec{S}) = V\nabla \times \vec{S} + \nabla V \times S$$

3. Jika $\vec{m}$ adalah satu vektor pemalar,

$$\nabla \times (\vec{m} \times \vec{r}) = 3\vec{m}$$

4. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

...6/-

TERJEMAHAN

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
1999/2000 Academic Session

February 2000

ZCT 304/3 - Keelektrikan dan Kemagnetan

Time : [3 hours]

Please check that the examination paper consists of TEN printed pages before you commence this examination.

Answer any SIX questions only. Candidates may choose to answer the questions in the Malay Language. If candidates choose to answer question in the English Language, it is compulsory to answer at least one question in the Malay Language.

Formulae for reference are given at the end of the paper.

1. (a) Write down the differential form of Maxwell's equations for a vacuum, defining carefully the quantities that enter.

(30/100)

(b) Derive the corresponding integral equations and briefly discuss the physical meaning of each of the equations.

(50/100)

(c) Prove that the equation for continuity of charge follows from Maxwell's equations.

(20/100)

2. (a) Define the electrostatic potential $V(\vec{r})$ and derive the differential equation (Poisson's equation) relating $V(\vec{r})$ to the charge density $\rho(\vec{r})$ in vacuum.

(30/100)

...7/-

(b) A spherically symmetric charge distribution is

$$\rho(r) = \rho_0 \ \ for\ r < R$$
$$\rho(r) = 0 \ \ for\ \ r > R$$

Integrate Poisson's equation to find expressions for $V(r)$ for $r < R$ and for $r > R$.

(30/100)

(c) Find the expressions for the electric field $\vec{E}(r)$ and sketch $\vec{E}(r)$ as a function of r.

(40/100)

3. (a) For magnetostatics, define the vector potential $\vec{A}(\vec{r})$.

(20/100)

(b) Explain what is meant by a gauge transformation of $\vec{A}(\vec{r})$.

(20/100)

(c) For a magnetic dipole loop $\vec{m}$ at the origin, $\vec{A}(\vec{r})$ is given by

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi\ r^3}$$

Derive the expression for the magnetic field $\vec{B}(\vec{r})$.

(20/100)

(d) Write a brief essay, which may include sketches, about this form of $\vec{B}(\vec{r})$.

(40/100)

4. (a) The real-field solution $\vec{E}_R$ of Maxwell's vacuum wave equation for a wave travelling in the z direction is written in terms of a complex vector amplitude $\vec{E}_0$ as

...8/-

$$\vec{E}_R = Re\left[\vec{E}_0\, exp(ikz - i\omega t)\right]$$

Explain, using diagrams if necessary, how the quantities k and ω are related to wavelength and frequency.

(40/100)

(b) Prove that $\vec{E}_0$ is transverse, $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$.

(20/100)

(c) State with proofs what the wave polarization is for

(i) $E_{0x} = E_{0y}$ (in amplitude and phase)

(20/100)

(ii) E_{0x} and E_{0y} $\pi/2$ out of phase and equal in magnitude.

(20/100)

5. (a) Write down Maxwell's equations for a general medium. Use them to prove that $\vec{D}$ is transverse in a plane wave in a source-free region (charge density and current both equal to zero). Explain why $\vec{E}$ is not necessarily transverse in a general anistropic medium.

(40/100)

(b) Define a linear, isotropic, non-magnetic medium (LIM) and state the relations between the electromagnetic field quantities in such a medium.

(30/100)

(c) Derive the wave equation for a plane wave in a source-free region in a LIM and find the wave velocity. Hence deduce the relation between refractive index and dielectric constant.

(30/100)

6. (a) In an ionic crystal like NaCl the frequency dependence of the dielectric function is given by

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

where $\varepsilon_\infty, \omega_L$ and ω_T are constants with $\omega_L > \omega_T$.

...9/-

Find an expression for the static value $\varepsilon(0)$. Identify the frequencies for which $\varepsilon(\omega) \to \infty$ and $\varepsilon(\omega) = 0$. Find the range of frequencies in which $\varepsilon(\omega)$ is negative. Find the limiting value of $\varepsilon(\omega)$ as $\omega \to \infty$.

(20/100)

(b) Taking $\varepsilon_\infty = 2$ and $\omega_L = 1.5\omega_T$ sketch the graph of $\varepsilon(\omega)$ versus ω / ω_T.

(30/100)

(c) Write down the equation relating wave vector k and ω in a plane wave. Use your graph of $\varepsilon(\omega)$ to sketch the graph of k versus ω. (Show k only where it is real).

(50/100)

7. (a) Electromagnetic radiation is normally incident on a plane interface between two isotropic media with dielectric function ε_1 and ε_2 (both of which may be frequency dependent). The reflected-wave amplitude is RE_0 where E_0 is the incident-wave amplitude and

$$R = \frac{\varepsilon_1^{1/2} - \varepsilon_2^{1/2}}{\varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2^{1/2}}$$

Prove that a metal of conductivity σ may be represented by a dielectric function $\varepsilon = 1 + i\sigma / \varepsilon_0\omega$ when the conductivity is the only contribution to ε.

(30/100)

(b) If medium 2 is such a metal and medium 1 is vacuum, show that for $\sigma >> \varepsilon_0\omega, |R| \approx 1$. What is the physical meaning of this result?

(40/100)

(c) Prove that if $\varepsilon_1 = 1$ and ε_2 is negative, $|R| = 1$. (Hint: find expressions for the magnitudes N and D of the numerator and denominator R).

(30/100)

...10/-

8. (a) Explain what is meant by a metallic waveguide. For which part of the electromagnetic spectrum are such waveguides used?

(30/100)

(b) For a wave travelling in the x direction the propagation equation is

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}$$

where d is the guide width and $n = 1,2,3,...$ is an integer. Sketch graphs to show the dependence of ω on k_x for a few values of n.

(40/100)

(c) Use your graphs to explain *cut-off frequency* and *monomode region.*

(30/100)

Reference Formulae

1. For a spherically symmetric function $V(r)$ the Laplace operator is

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right)$$

2. If V is a scalar and $\vec{S}$ is a vector,

$$\nabla \times (V\vec{S}) = V\nabla \times \vec{S} + \nabla V \times \vec{S}$$

3. If $\vec{m}$ is a constant vector,

$$\nabla \times (\vec{m} \times \vec{r}) = 2\vec{m}$$

4. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$

- oooOOooo -