UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1999/2000

Februari 2000

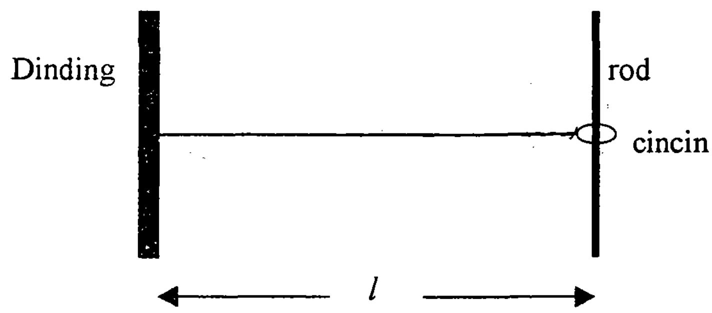
ZCT 218/4 – Kaedah Matematik

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana **LIMA** soalan. Jika calon menjawab lebih daripada lima soalan, hanya lima soalan pertama mengikut susunan dalam skrip jawapan akan diberi markah. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1 Satu tali yang bergetar dengan jisim per unit panjang σ dan panjang l, di bawah pengaruh ketegangan T, diapit dengan ketat pada satu hujungnya dan hujung yang lain dipasang pada suatu cincin yang jisimnya boleh diabaikan dan boleh meluncur secara bebas pada satu rod. (Rujuk kepada rajah 1).



Rajah 1

(a) Tuliskan persamaan gelombang untuk sesaran tali yang bergetar, $\psi(x,t)$, dan seterusnya selesaikannya dengan kaedah pembolehubah-pembolehubah terpisahkan.

(8/20)

...2/-

(b) Cari mod-mod normal dan frekuensi-frekuensi yang sepadan untuk sistem ini.

(8/20)

{ Diberi syarat-syarat sempadan untuk sistem itu ialah

$$\psi(0,t) = 0$$

$$\left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

dan diberi juga syarat-syarat awal untuk sistem itu ialah

$$\psi(x,0) = 0$$

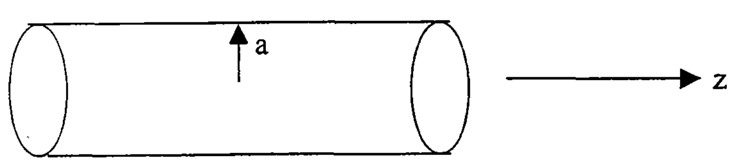
$$\left.\frac{\partial \psi_n(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = ck_n\, u_n(x)$$

dengan indeks n merujuk kepada mod-mod normal sistem itu, c ialah halaju gelombang tali bergetar dan k ialah nombor gelombang atau pemalar pemisahan pembolehubah. }

(c) Lakarkan gambarajah-gambarajah yang dapat menggambarkan bentuk-bentuk tiga mod dengan frekuensi terendah.

(4/20)

2. Gelombang akustik merambat di dalam paip berbentuk silinder yang panjangnya tidak terhingga dan dengan jejari a, seperti yang ditunjuk dalam Rajah 2.



Rajah 2

(a) Tuliskan persamaan gelombang untuk fluktuasi ketumpatan gas, $\rho(r,\theta,z,t)$, di dalam paip apabila bunyi dihantar melaluinya, dan dapatkan penyelesaian am untuknya dengan kaedah pembolehubah-pembolehubah terpisahkan.

(8/20)

{ Diberi syarat sempadan pada paksi permukaan paip ialah

$\rho(0,\theta,z,t)$ adalah terhingga

$$\left.\frac{\partial\rho(r,\theta,z,t)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$$

dan ρ mestilah terhingga untuk $-\infty < z < \infty$. }

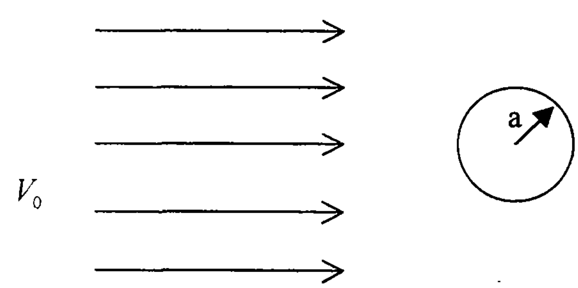
(b) Dapatkan penyelesaian am mod-mod yang boleh merambat didalam paip

(6/20)

(c) Dapatkan persamaan yang boleh menentukan frekuensi minimum untuk mod-mod yang boleh merambat di dalam paip.

(6/20)

3. Di dalam aliran suatu bendalir tidak termampatkan, wujudnya suatu halangan berbentuk sfera. (Rujuk kepada rajah 3).



Rajah 3

Jika aliran ini mempunyai halaju malar V_0 apabila jauh daripada halangan, tentukan keupayaan aliran ini dan seterusnya menentukan halaju aliran di sebarang titik aliran ini.

(20/20)

...4/-

{ Diberi harmonik-harmonik sfera tertib yang rendah seperti berikut:

$$Y_0^0(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \quad e^{i\phi}$$

$$Y_1^0(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\phi)=+\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \quad e^{-i\phi}$$

$$Y_2^2(\theta,\phi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta \quad e^{i2\phi}$$

$$Y_2^1(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta \quad e^{i\phi}$$

$$Y_2^0(\theta,\phi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

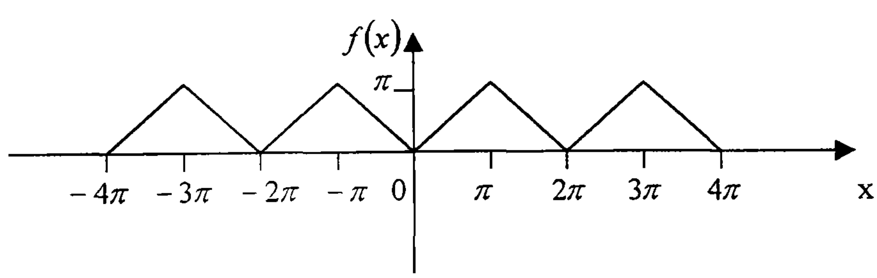
$$Y_2^{-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta \quad e^{-i\phi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta,\phi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta \quad e^{-i2\phi}$$

}

4. (a) Satu gelombang segitiga di dalam julat $-\pi \le x \le \pi$ diberi oleh fungsi

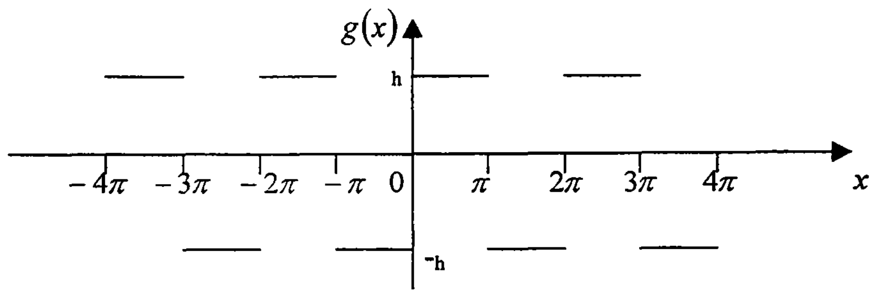
$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad 0<x<\pi \\ -x & , \quad -\pi<x<0 \end{cases}$$



Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk $f(x)$. (10/20)

(b) Satu gelombang segiempat tepat di dalam julat $-\pi \le x \le \pi$ diberi oleh fungsi

$$g(x) = \begin{cases} h & , \quad 0 < x < \pi \\ -h & , \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

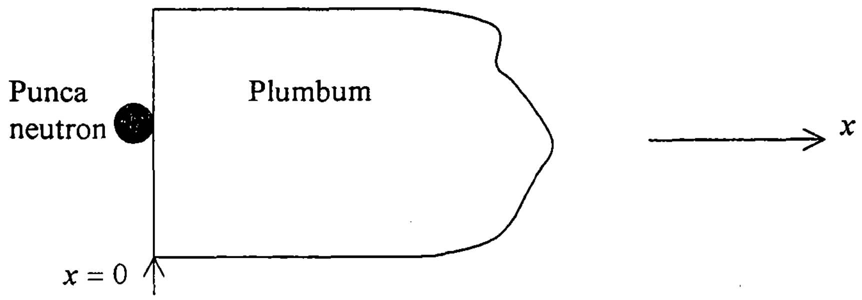


Terbitkan perwakilan siri Fourier untuk $g(x)$.

(10/20)

5. Seketul Plumbum dipancarkan oleh sinaran neutron. Zarah-zarah neutron yang diserapkan oleh Plumbum dilambatkan di dalam medium Plumbum. Proses gerakan zarah-zarah neutron memenuhi persamaan difusi 1-dimensi berikut:

$$\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}$$

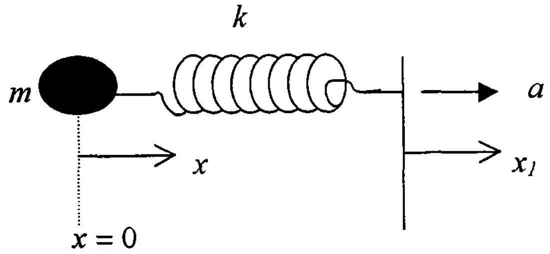


Diberi syarat awal untuk proses ini ialah $n(x,0) = M\delta(x)$, iaitu sepadan dengan satu punca sinaran neutron yang diletakkan pada $x = 0$, yang memancarkan M neutron per unit luas per unit masa. Terbitkan penyelesaian untuk difusi zarah-zarah neutron ini, iaitu $n(x,t)$ dengan menggunakan teknik transformasi Fourier.

(20/20)

Diberi kamiran tentu yang berguna: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(ax^2 + bx + c)]dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{b^2}{4a} - c\right]$

6.



Satu jisim m dipasangkan kepada suatu spring dengan pemalar spring k dan sistem ini berada dalam keadaan statik. Pada masa $t \geq 0$, hujung bebas spring dikenakan suatu pecutan luar yang malar a yang berarah x seperti yang ditunjukkan dalam rajah di atas.

(a) Cari sesaran, $x_1(t)$, untuk jisim m yang disebabkan oleh pecutan luar a tanpa kesan spring.

(4/20)

(b) Dengan mengambil pembolehubah

$$x_2(t) = x(t) - x_1(t)$$

tunjukkan bahawa persamaan gerakan untuk jisim disebabkan oleh spring di beri oleh

$$m\ddot{x}_2(t) + m a + kx_2(t) = 0$$

(4/20)

(c) Selesaikan $x_2(t)$ dengan teknik transformasi Laplace dan dapatkan penyelesaian am untuk sesaran sistem ini, $x(t)$.

(8/20)

(d) Tentukan bentuk $x(t)$. untuk had masa $t << 1$ (4/20)

...7/-

LAMPIRAN

Jadual transformasi Laplace

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-k}$	e^{kt}
$\frac{1}{(s-k)^2}$	te^{kt}
$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$
$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$
$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$
$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$

Operator ∇ dan ∇^2 untuk tiga jenis sistem koordinat:

Koordinat Cartesian:

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Koordinat silinder:

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Koordinat sfera:

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$