UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 418/421 – Aljabar Moden

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan bernilai 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan di penghujung subsoalan ini.

1. (a) Katakan A, B, C ialah tiga set yang tidak kosong dan $f: A \to B$, $g: B \to C$ ialah dua fungsi. Tunjukkan bahawa

   (i) jika f dan g satu-ke-satu, maka $f \circ g$ adalah satu-ke-satu.
   (ii) jika f dan g keseluruh, maka $f \circ g$ adalah keseluruh.

   (30 markah)

   (b) Katakan R set semua nombor nyata, tentukan sama ada hubungan yang ditakrifkan seperti berikut adalah refleksif, simetri atau transitif.

   $$xHy \quad \Leftrightarrow \quad x - y \geq 1.$$

   (30 markah)

   (c) Fungsi-fungsi f dan g setiapnya dengan domain R ditakrifkan seperti berikut:

   $$(x)f = x + 2$$
   $$(x)g = x^2 + 1$$

   (i) Nyatakan julat bagi f dan g.
   (ii) Cari $(x)(f \circ g)$ dan $(x)(g \circ f)$.
   (iii) Cari nilai x jika $(x)(f \circ g) = (x)(g \circ f)$.

   (40 markah)

2. (a) Katakan R set semua nombor nyata. " * " adalah suatu operasi dedua atas R yang ditakrifkan seperti berikut:

   $$a * b = ab + b.$$

   (i) Tentukan sama ada " * " kalis tukar tertib atau kalis sekutuan .
   (ii) Carikan identiti kiri dan identiti kanannya. Tentukan sama ada " * " mempunyai identiti.
   (iii) Cari x supaya $(x * 3) * 2 = 5$.

   (40 markah)

   (b) Katakan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan, $a, b \in G$.
   Buktikan bahawa jika $a^{-1} * b * a = b^{-1}$, dan $b^{-1} * a * b = a^{-1}$, maka $a^4 = b^4 = e$ dengan e sebagai identiti.

   (30 markah)

...3/-

(c) Buktikan kumpulan A_n $(n \geq 2)$ mempunyai $\frac{1}{2}n!$ unsur.

(30 markah)

3. (a) Cari sifir Cayley bagi

(i) suatu kumpulan $G = \{e, a, b\}$ yang mengandungi tiga unsur.

(ii) suatu kumpulan $G = \{e, a, b, c\}$ yang bukan kumpulan kitaran dan mengandungi empat unsur.

(30 markah)

(b) Katakan $H = \{e, (1\ 2)(3\ 4)\}$
dan $K = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.
Tunjukkan bahawa H adalah subkumpulan normal bagi K dan K adalah subkumpulan normal bagi A_4 tetapi H bukan subkumpulan normal bagi A_4.

(40 markah)

(c) Cari

(i) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5)(4\ 5\ 6)$

(ii) $(1\ a\ b)(b\ c)(b\ a\ 1)$

dan tentukan sama ada pilihatur-pilihatur tersebut genap atau ganjil.

(30 markah)

4. (a) Katakan Z ialah set semua integer, R ialah set semua nombor nyata dan $R^* = R - \{0\}$. Tentukan sama ada fungsi-fungsi yang berikut ialah homomorfisma. Jika ia merupakan homomorfisma, tentukan imej dan intinya.

(i) $x\phi = x$ dari $\langle Z, + \rangle$ ke $\langle$ R, $+ \rangle$

(ii) $x\phi = |x|$ dari $\langle R^*, \times \rangle$ ke $\langle R^*, \times \rangle$.

(40 markah)

(b) Katakan ϕ adalah suatu homomorfisma daripada kumpulan $\langle G, \circ \rangle$ ke kumpulan $\langle H, * \rangle$ dan $K = \text{Inti } \phi = \{x \in G \mid x\phi = f\}$, di sini f adalah identiti bagi H.
Buktikan bahawa K ialah subkumpulan normal bagi G.

(30 markah)

(c) Fungsi f ditakrifkan atas S_4 dengan

$$(\alpha)f=(1\ 2\ 3\ 4)\,\alpha\,(4\ 3\ 2\ 1), \qquad \alpha\in S_4.$$

Tentukan sama ada f suatu automorfisma atas S_4.

(30 markah)

5. (a) Berikan takrif bagi setiap istilah yang berikut:
   (i) gelanggang
   (ii) domain integer
   (iii) medan.

(20 markah)

(b) Jika $\langle R, +, \times\rangle$ adalah suatu domain integer, buktikan bahawa

$$a\times b=a\times c \text{ dan } a\neq 0, \Rightarrow b=c.$$

(20 markah)

(c) Katakan

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\in R\right\}$$

dan "+","×" masing-masing ialah penambahan dan pendaraban matriks.

(i) Tunjukkan $\langle S, +, \times\rangle$ adalah suatu gelanggang.

(ii) Tentukan sama ada gelanggang ini merupakan suatu medan atau tidak.

(60 markah)

- oooOooo-