UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2008/2009

Jun 2009

JIM 417 – Persamaan Pembezaan Separa

Masa: 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

...2/-

1. (a) Dapatkan persamaan pembezaan separa peringkat pertama jika penyelesaian amnya diberikan seperti berikut:

$$ax^2 + by^2 + u^2 = 1$$

dengan a dan b adalah pemalar.

(35 markah)

(b) Tunjukkan bahawa

$u(x,y) = f(x+\lambda y) + y\ g(x+\lambda y)$, λ adalah pemalar, memuaskan

persamaan

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(30 markah)

(c) Selesaikan persamaan pembezaan separa berikut:

$$y\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} - 2u = 0.$$

(35 markah)

2. (a) Dapatkan kembangan Siri Fourier bagi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}$$

$$f(x+10) = f(x)$$

Bagaimanakah $f(x)$ dapat ditakrifkan di $x = -5$, $x = 0$ dan $x = 5$ supaya Siri Fourier menumpu pada $f(x)$ bagi $-5 \le x \le 5$.

(50 markah)

(b) Arus elektrik I di dalam satu kabel yang jaraknya x dari satu hujung pada masa t memenuhi persamaan

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{I}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + 1$$

Dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah, $I = X(x)T(t)$, dapatkan penyelesaian yang memenuhi syarat-syarat $I = 0$ apabila $x = \ell$ dan $\frac{\partial I}{\partial t} = -ae^{-2ct}$ apabila $x = 0$, untuk semua nilai t dan pemalar-pemalar a dan c.

(50 markah)

3. Katakan

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2 \qquad (1)$$

Dengan mencari persamaan cirian bagi persamaan (1) dan memilih jelmaan yang sesuai, tunjukkan bahawa ia dapat dijelmakan ke dalam bentuk berkanun

$$u_{\varepsilon\eta} = \frac{1}{3}u_\eta - \frac{8}{9} \qquad (2)$$

Seterusnya, dengan menggunakan gantian yang sesuai, tunjukkan persamaan (2) dapat dijelmakan menjadi

$$v_\varepsilon = \frac{1}{3}v - \frac{8}{9}$$

Oleh yang demikian atau cara lain, dapatkan penyelesaian am bagi persamaan (1).

(100 markah)

4. Dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah, selesaikan masalah nilai awal-sempadan berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < \ell,\ t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le \ell$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le \ell$$
$$u(0,t) = 0, \qquad t \ge 0$$
$$u(\ell,t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

(100 markah)

5. (a) Jelmaan Laplace bagi $u(x,t)$ ditakrifkan seperti berikut:

$$\mathscr{L}\{u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt = F(x,s).$$

Tunjukkan bahawa

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right\} = s\overline{u}(x,s) - u(x,0)$$

dengan $\overline{u}(x,s) = \mathscr{L}\{u(x,t)\}$.

Seterusnya, cari $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right\}$ dalam sebutan

$\overline{u}(x,s)$, $u(x,0)$ dan $\frac{\partial}{\partial t} u(x,0)$.

(40 markah)

(b) Dengan menggunakan keputusan dalam (a), selesaikan persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x > 0,\ t > 0$$

jika $u(x,0) = 0$ dan $u(0,t) = u_0$.

Di sini, k dan u_0 adalah pemalar.

(60 markah)

...5/-

Senarai Rumus

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}\,.$$

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \operatorname{kos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

dengan

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{kos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{kos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan $a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \operatorname{kos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha^2 y = 0$ mempunyai penyelesaian

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$ mempunyai penyelesaian

$$y = A\ \text{kosh}\ \alpha x + B\ \sinh \alpha x.$$

$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0$ mempunyai penyelesaian

$$R_n = C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}.$$

$r\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = 0$ mempunyai penyelesaian

$$R = A + B\ln r.$$

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t}dt$$

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}[F(\alpha)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} \, dx$$

$$\mathfrak{F}[f(x)] = F_s(n) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}[F_s(n)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_s(n) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\mathfrak{F}[f(x)] = F_c(n) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{kos} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}[F_c(n)] = \frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \operatorname{kos} \frac{n\pi x}{L}$$

$$\mathfrak{F}[f''(x)] = \frac{2n}{\pi}\left[f(0) - (-1)^n f(\pi)\right] - n^2 F_s(n)$$

$$\mathfrak{F}[f''(x)] = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n f'(\pi) - f'(0)\right] - n^2 F_c(n)$$

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, dt$$

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha).$$

$$\text{Jika } g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < \alpha \\ f(t-\alpha), & t > 0 \end{cases}$$

maka $[f(t)] = e^{-\alpha s} F(s)$

$$\mathscr{L}\left[f^n(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathscr{L}[t f(t)] = -F'(s) = \frac{d}{ds} \mathscr{L}[f(t)]$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u) \, du\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s) G(s)] = \int_0^t f(u) g(t-u) \, du = f * g$$

...8/-

Jadual Jelmaan Laplace

f(t)	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
kos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$
kosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t kos bt	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+b^2\right)^2}$
t sin bt	$\frac{2bs}{\left(s^2+b^2\right)^2}$
e^{at} kos bt	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
e^{at} sin bt	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

- oooOooo -