
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 317 – Persamaan Pembezaan II

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. Persamaan Bessel berperingkat sifar diberi oleh

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

Tunjukkan bahawa

(a) $x = 0$ adalah titik singular sekata. (15 markah)

(b) punca persamaan indeksan ialah

$$r_1 = r_2 = 0.$$

(30 markah)

(c) satu penyelesaian untuk $x > 0$ ialah

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

(40 markah)

(d) Nyatakan selang penumpuan untuk siri tersebut.

(15 markah)

2. (a) Tunjukkan masalah nilai sempadan

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) + y'(1) = 0$$

mempunyai hanya satu nilai eigen dan cari fungsi eigen yang bersepadan dengannya.

(50 markah)

...3/-

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan autonomous

$$\frac{dx}{dt} = (x-1)^2 (x+2).$$

- (i) Cari semua titik genting dan penyelesaian keseimbangan bagi persamaan ini.
- (ii) Lakarkan graf $\frac{dx}{dt}$ lawan x .
- (iii) Bincangkan kestabilan penyelesaian keseimbangan dan perilaku jangka panjang bagi semua penyelesaian.

(50 markah)

3. Persamaan pembezaan Hermite diberi oleh

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (*)$$

- (a) Tentusahkan persamaan tersebut adalah singular. (15 markah)
- (b) Cari fungsi p , q dan r supaya persamaan berkenaan boleh ditulis semula dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville berikut:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0.$$

(30 markah)

(c) Jika $H_n(x)$ adalah polinomial Hermite yang menepati persamaan (*) dan syarat sempadan

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} y(x) = 0$$

dan

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} y'(x) = 0,$$

tuliskan hubungan keortogonalan bagi $H_n(x)$.

(25 markah)

...4/-

- (d) Andaikan $f(x)$ suatu fungsi yang diberi dan kembangan untuk $f(x)$ dalam sebutan polinomial $H_n(x)$ ialah

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x).$$

Dapatkan rumus bagi koefisien a_n .

(30 markah)

4. Pertimbangkan sistem persamaan pembezaan autonomous yang tak linear

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

- (a) Cari titik keseimbangan bagi sistem tersebut.

(20 markah)

- (b) Dapatkan matriks penglinearan bagi setiap titik keseimbangan dan tentukan nilai eigennya.

(45 markah)

- (c) Bincangkan kestabilan titik keseimbangan sistem berkenaan.

(35 markah)

5. (a) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t), t)$$

$$y(0) = y_0.$$

- (i) Dalam kaedah berangka, huraikan pengertian tentang ralat pangkasan setempat, ralat pangkasan global dan pangkat bagi suatu kaedah berangka.

...5/-

- (ii) Jika saiz langkah untuk kaedah berperingkat ketiga dikurangkan daripada 0.01 kepada 0.001, bagaimanakah ia memberi kesan ke atas ralat pangkasan global?

(40 markah)

- (b) Cari penyelesaian hampiran bagi masalah

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - t^2$$

$$y(0) = 1$$

dalam selang $0 \leq t \leq 0.5$ dengan menggunakan kaedah Euler dan saiz langkah $h = 0.1$.

(60 markah)

- ooo0ooo -

