UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIM 201 – Aljabar Linear

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Diberi sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x \qquad - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -2 \\ x + 2y + kz &= 1. \end{aligned}$$

Dapatkan nilai k supaya sistem ini

(i) mempunyai penyelesaian unik

(ii) mempunyai penyelesaian tak terhingga banyaknya

(iii) tak konsisten.

(40 markah)

(b) Katakan $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ dan $T = \{w_1, \ldots, w_n\}$ merupakan dua asas bagi ruang vektor V yang mempunyai dimensi terhingga. Buktikan bahawa $m = n$.

(30 markah)

(c) Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & P \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ matriks singular, tentukan nilai P.

(30 markah)

2. (a) Katakan

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \; x + y = z + w \right\} \subset \mathbb{R}^4 .$$

Tunjukkan V suatu subruang $\mathbb{R}^4$.

(40 markah)

(b) Tentukan sama ada set

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan asas bagi set V di dalam bahagian (a).

(40 markah)

(c) Diberi $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ adalah fungsi satu ke-satu. Buktikan bahawa $gf : A \rightarrow C$ adalah fungsi satu ke-satu.

(20 markah)

3. (a) Diberi matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hitung

(i) $|A|$

(ii) adj A

(iii) A^{-1}

(iv) A adj (A)

(v) pangkat A

(vi) penyelesaian X jika $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(vii) $|\,\mathrm{adj}\,(5A)\,|$

(viii) $|A^{-1}\,\mathrm{adj}\,(A^{-1})\,|$

(ix) $E_1(4)E_3^1(-1)E_2^1E_3^2(-2)E_2\left(\frac{1}{2}\right)A$.

(80 markah)

(b) Dengan menggunakan operasi baris, tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

(20 markah)

4. (a) Cari nilai eigen dan vektor eigen bagi matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Adakah B terpepenjurukan? Berikan alasan anda.

(60 markah)

(b) Jika B terpepenjurukan, maka $B = PDP^{-1}$.
D ialah satu matriks pepenjuru yang mana pemasukan pepenjurunya adalah nilai-nilai eigen matriks B. Tunjukkan bahawa

$$B = QDQ^T$$

Dengan $Q = P/3$. Adakah lajur-lajur dalam matriks Q juga merupakan vektor-vektor eigen bagi B? Beri alasan anda.

(40 markah)

...5/-

5. (a) Katakan $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dapatkan transformasi linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian hingga A adalah matriks perwakilan dari T berhubung dengan asas tertib

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ dan}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

masing-masing.

(50 markah)

(b) Katakan $T : V \to V$ adalah transformasi linear dengan aras tertib B_1 dan B_2. Katakan P adalah matriks peralihan dari B_2 ke B_1. Buktikan

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1} P.$$

Adakah P berortogon? Buktikan atau sangkalkan.

(50 markah)

- oooOooo -