UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2003/2004

Februari/Mac 2004

JIF 315 – Kaedah Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 20 markah.

1. Satu set permukaan dalam tiga dimensi diberi oleh ungkapan

$$w = (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2$$

(a) Tunjukkan bahawa titik (1,1,1) berada pada permukaan yang diberi oleh ungkapan

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$$ (3markah)

(b) Tunjukkan bahawa kecerunan (gradient) pada titik (1,1,1) diberi oleh ungkapan

$$\vec{N} = -2\hat{i} + 2\hat{k}$$ (5 markah)

(c) Tunjukkan bahawa garis normal pada permukaan tangen pada titik (1,1,1) diberi oleh ungkapan

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (1+t)\hat{k}$$

di mana t adalah parameter sembarangan. (5 markah)

(d) Dapatkan persamaan permukaan tangen pada titik (1,1,1).
(7 markah)

2. Pertimbangkan medan keupayaan skalar V yang diberi oleh ungkapan

$$V = 5\exp\left(-\frac{1}{2}\left\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right\}\right)$$

(Berikan jawapan di dalam sebutan eksponential)

(a) Dapatkan nilai V pada titik asalan. (2 markah)
(b) Dapatkan medan $\vec{E} = \vec{\nabla}V$ pada titik asalan. (6 markah)
(c) Dapatkan $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ pada titik yang sama. (6 markah)
(d) Dapatkan $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ pada sebarang titik. (6 markah)

...3/..

3. (a) Katakan satu daya yang diberi oleh ungkapan berikut

$$\vec{F} = (x-1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

telah bertindak keatas satu zarah dan telah menggerakkan zarah tersebut melalui lintasan berikut, dari (0,0,0)→(1,0,0)→(1,1,0)→(1,1,1). Dapatkan jumlah kerja yang dilakukan untuk menggerakkan zarah mengikut lintasan begini.

(10 markah)

b) Pertimbangkan satu zarah yang berada pada titik $\vec{r}$ pada masa t seperti berikut

$$\vec{r} = 5\ \sin(2\pi t)\hat{i} + 5\ \mathrm{kos}(2\pi t)\hat{j} + 5t\hat{k}$$

(i) Dapatkan halaju $\vec{v}$ untuk zarah ini bila masa t = 1 saat.

(3 markah)

(ii) Dapatkan pecutan $\vec{a}$ pada masa yang sama.

(3 markah)

(iii) Dapatkan jauh jarak yang di alami oleh zarah ini dari masa t = 0 ke t = 1.

(4 markah)

4. (a) Fungsi Gamma $\Gamma(n)$, ditakrifkan seperti berikut

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

Tunjukkan bahawa

$$\int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Gunakan hubungan:

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(10 markah)

...4/..

(b) (i) Fungsi Beta B(m,n), di takrifkan seperti berikut

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Buat gantian $x = \text{kos}^2\theta$, tunjukkan bahawa

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{kos}^{2m-1}\theta \, \sin^{2n-1}\theta \, d\theta$$

(5 markah)

(ii) Dari itu tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{kos}^3\theta \, \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{4}$$

Boleh gunakan hubungan berikut

$$\left[\begin{array}{l}\text{Boleh gunakan hubungan berikut} \\ B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\end{array}\right]$$

(5 markah)

5. (a) Kebanyakan fungsi-fungsi khas di dalam fizik adalah penyelesaian kepada persamaan perbezaan peringkat kedua, dan mempunyai pertalian jadi semula. Pertalian jadi semula untuk polinomial Hermite, $H_n(x)$ adalah seperti berikut

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Dan diketahui bahawa

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$

Maka tunjukkan bahawa

$$H_2(x) = 2(2x^2 - 1)$$
$$H_3(x) = 2(4x^3 - 6x)$$

(10 markah)

...5/..

(b) Salah satu dari kegunaan fungsi-fungsi khas adalah untuk mewakili fungsi-fungsi tertentu di dalam bentuk polinomial. Dengan kata lain, satu polinomial f(x) dari darjah m, boleh diwakilkan oleh polinomial Legendre, $H_n(x)$, seperti berikut

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n H_n(x)$$

di mana a_n adalah pekali dan ia diberi oleh unggapan

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx$$

Dari itu dapatkan x^2 dalam sebutan polinomial Hermite iaitu

$$\begin{aligned} x^2 &= \sum_{n=0}^{2} a_n H_n(x) \\ &= a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \end{aligned}$$

Gunakan sebutan Legendre seperti yang terdapat dalam soalan di atas untuk perkamiran.

(10 markah)

- oooOooo -