UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2008/2009

Jun 2009

MST 562 – Stochastic Processes
[Proses Stokastik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all ten** [10] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]*

1. Let X denote the number of white balls selected when k balls are taken out at random from a box containing n white balls and m black balls.
   (i) Compute $P(X = i)$.
   (ii) Let, for $i = 1, 2, ..., k$,
   $$X_i = \begin{cases} 1, & \textit{if the ith ball selected is white} \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$
   Compute $E(X)$.

[10 marks]

2. Write short notes on the following:
   (i) recurrent state
   (ii) transient state
   (iii) stationary and independent increment

[10 marks]

3. An individual has 3 umbrellas which he uses in going from his home to his office and vice versa. If he is at home (the office) at the beginning (end) of the day and it is raining, then he will take an umbrella with him to the office (home), provided there is one to be taken. If it is not raining, then he never takes an umbrella. Assume that, independent of the past, it rains at the beginning (end) of a day with probability 0.3. Let X_n denotes the number of umbrellas the individual has at his disposal at the moment he begins his nth trip.
   (i) Show that $\{X_n, n \geq 0\}$ is a Markov chain. Define the states of the process and find its transition probability matrix.
   (ii) Find $P\{X_1 = 1, X_2 = 3 \mid X_0 = 3\}$.
   (iii) Find the limiting probabilities.
   (iv) What fraction of the time does the individual get wet?

[10 marks]

4. Cars pass a certain location on the highway at a Poisson rate of one per minute. Suppose that five percent of the cars are Protons.
   (i) What is the probability that at least one Proton passes by the location during an hour?
   (ii) Given that ten Protons have passed by the location in an hour, what is the expected number of cars to have passed by in that time?
   (iii) If 50 cars have passed by the location in an hour, what is the probability that five of them were Protons?

[10 marks]

1. *Andaikan X mewakili bilangan bola putih yang terpilih apabila k bola dikeluarkan secara rawak daripada sebuah kotak yang mengandungi n bola putih dan m bola hitam.*
   (i) *Hitung* $P(X = i)$.
   (ii) *Andaikan bagi* $i = 1, 2, \ldots, k$,
   $$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jika bola ke} - i \text{ berwarna putih} \\ 0, & \text{sebaliknya.} \end{cases}$$
   Hitung $E(X)$.

[10 markah]

2. *Tuliskan nota pendek mengenai yang berikut:*
   (i) *keadaan jadi semula*
   (ii) *keadaan fana*
   (iii) *peningkatan pegun dan peningkatan tak bersandar*

[10 markah]

3. *Seorang individu mempunya 3 kaki payung yang digunakannya bila ke pejabat dari rumah dan sebaliknya. Jika ia di rumah (di pejabat) pada awal (akhir) hari dan hari sedang hujan, ia akan membawa sekaki payung dengannya ke pejabat (rumah), dengan syarat ada payung untuk dibawa. Jika hari tidak hujan, ia tidak akan membawa payung. Andaikan bahawa kebarangkalian hujan pada awal (akhir) hari ialah 0.3 dan tidak bergantung kepada peristiwa sebelumnya. Andaikan* X_n *mewakili bilangan payung yang ada pada individu tersebut untuk digunakan bila masa ia memulakan perjalanannya yang ke-n.*
   (i) *Tunjukkan bahawa* $\{X_n, n \geq 0\}$ *ialah suatu rantai Markov. Takrifkan keadaan-keadaan proses dan dapatkan matriks kebarangkalian peralihannya.*
   (ii) *Dapatkan* $P\{X_1 = 1, X_2 = 3 \mid X_0 = 3\}$.
   (iii) *Dapatkan kebarangkalian- kebarangkalian penghad.*
   (iv) *Berapahkah pecahan masa yang mana individu tersebut basah?*

[10 markah]

4. *Kereta melalui suatu lokasi di lebuhraya pada kadar Poisson satu setiap minit. Andaikan lima peratus daripada kereta tersebut adalah kereta Proton.*
   (i) *Berapakah kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya sebuah Proton melalui lokasi tersebut dalam satu jam?*
   (ii) *Diberikan bahawa sepuluh buah Proton melalui lokasi tersebut dalam tempoh satu jam, berapakah bilangan kereta yang dijangka telah berlalu dalam tempoh tersebut?*
   (iii) *Jika 50 buah kereta telah melalui lokasi tersebut dalam tempoh satu jam, berapakah kebarangkalian bahawa lima daripadanya adalah kereta Proton?*

[10 markah]

5. In a branching process, the number of offspring per individual in a population has a binomial distribution with parameters $n = 2$ and p. Starting with $X_0 = 1$,

(i) find the expected number of individual that ever exist in this population.
(ii) calculate the extinction probability.

[10 marks]

6. Let X_1, X_2, ... denote the interarrival times of events of a nonhomogeneous Poisson process having intensity function $\lambda(t)$.

(i) Are the X_i's independent and identically distributed? Explain your answer.
(ii) If $\lambda(t) = 3t + 1$, what is the probability that n events occur between time $t = 3$ and $t = 5$?

[10 marks]

7. An insurance company pays out claims on its life insurance policies in accordance with a Poisson process having rate $\lambda = 7$ per week. The amount of money paid on each policy is exponentially distributed with mean RM5,000.

(i) What is the expected time until the tenth claim arrives?
(ii) Calculate the mean and variance of the amount of money paid by the insurance company in a month?

[10 marks]

8. Potential customers arrive at a one-pump station at a Poisson rate of 20 cars per hour. However, customers will only enter the station for gas if there are no more than two cars (including the one presently being attended to) at the pump. Suppose the amount of time required to service a car is exponentially distributed with a mean of five minutes.

(i) What fraction of the attendants's time will be spent servicing cars?
(ii) What fraction of potential customers are lost?

[10 marks]

9. Prove the renewal equation

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t - x)dF(x).$$

[10 marks]

5. *Dalam suatu proses bercabang, bilangan anak bagi setiap individu dalam suatu populasi mempunyai taburan binomial dengan parameter $n = 2$ dan p. Bermula dengan $X_0 = 1$,*

   (i) *dapatkan bilangan individu yang dijangka wujud dalam populasi ini.*

   (ii) *hitung kebaranglain pupus.*

   [10 markah]

6. *Andaikan $X_1, X_2, \ldots$ mewakili masa antara-ketibaan bagi peristiwa-peristiwa proses Poisson tak homogen dengan fungsi ketumpatan $\lambda(t)$.*

   (i) *Adakah X_i tak bersandar dan tertabur secaman? Jelaskan jawapan anda.*

   (ii) *Jika $\lambda(t) = 3t + 1$, berapakah kebarangkalian bahawa n peristiwa berlaku di antara masa $t = 3$ dan $t = 5$?*

   [10 markah]

7. *Sebuah syarikat insuran membayar tuntutan ke atas polisi insuran nyawa mengikut suatu proses Poisson dengan kadar $\lambda = 7$ setiap minggu. Amaun yang dibayar kepada setiap polisi tertabur secara eksponen dengan min RM5,000.*

   (i) *Apakah masa jangkaan sehingga tuntutan kesepuluh tiba?*

   (ii) *Hitung min dan varians bagi amaun yang dibayar oleh syarikat insuran tersebut dalam satu bulan?*

   [10 markah]

8. *Baka-bakal pelanggan tiba di sebuah stesen minyak satu-pam pada kadar Poisson 20 buah kereta setiap jam. Walau bagaimana pun, pelanggan hanya akan memasuki stesen tersebut untuk mengisi minyak jika terdapat tidak lebih daripada dua buah kereta (termasuk kereta yang sedang dilayan) dekat pamnya. Andaikan amaun masa yang diperlukan untuk melayan sebuah kereta tertabur secara eksponen dengan min lima minit.*

   (i) *Berapakah pecahan masa pelayan dihabiskan melayan kereta? Dapatkan kebarangkalian penghad P_i, $i = 0,1,2,3$.*

   (ii) *Berapakah pecahan bilangan bakal pelanggan yang hilang?*

   [10 markah]

9. *Buktikan persamaan pembaharuan*

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\,dF(x).$$

   [10 markah]

10. Mr. M has a policy that he buys a new computer as soon as his present computer breaks down or when it reaches the age of T years. The lifetime of a computer is a continuous random variable having a distribution F and probability density f. Suppose that a new computer costs RM C_1 and an additional cost of RM C_2 is incurred whenever Mr. M's computer breaks down. Assuming that a T-year-old computer in working order has an expected resale value $R(T)$, find Mr. M's long-run average cost.

[10 marks]

10. *Encik M mempunyai dasar untuk membeli sebuah komputer baru sebaik sahaja komputernya yang sedia ada rosak atau mencapai usia T tahun. Masa hayat sebuah komputer ialah suatu pembolehubah rawak selanjar dengan taburan F dan ketumpatan kebarangkalian f. Andaikan kos sebuah komputer baru ialah RM* C_1 *dan kos tambahan sebanyak RM* C_2 *terlibat setiap kali komputer Encik M rosak. Dengan mengandaikan bahawa sebuah komputer berusia T-tahun yang masih berfungsi mempunyai nilai jual-balik yang dijangka R(T), dapatkan kos purata jangka panjang bagi Encik M.*

[10 markah]

- 000 O 000 -