

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
Academic Session 2008/2009

April/May 2009

**MSS 318 – Discrete Mathematics**  
***[Matematik Diskret]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all four** [4] questions.

**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) How many functions are there from the set  $\{1, 2, \dots, n\}$ , where  $n$  is a positive integer, to the set  $\{0, 1\}$  that assign 0 to both 1 and  $n$ ?
- (b) How many books must be chosen from among 24 Mathematics books, 25 Computer Science books, 21 Literature books and 15 Economics books in order to assure that at least 12 books on the same subject are chosen?
- (c) The English alphabet contains 21 consonants and five vowels. How many strings of six lowercase letters of the English alphabet contain exactly one vowel?
- (d) How many eight bit strings with exactly two 1s are such that the 1s are not adjacent?
- (e) In how many ways can six different letters be sent if we can make use of three couriers?
- (f) In how many ways can 7 people be arranged around a circular table if two of them insist on sitting next to each other? (Seatings are considered to be the same if they can be obtained from each other by rotating the table).
- (g) How many different 9-digit numbers can be formed by using the digits in the number 363565 ?

[35 marks]

2. (a) The Fibonacci numbers satisfy the relation  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , with initial conditions  $f_0 = 0, f_1 = 1$ . Solve this recurrence relation and find an explicit formula for the Fibonacci numbers.
- (b) Find the solution to the recurrence relation  $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$  with the initial condition  $a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$ .
- (c) Find the solution to the recurrence relation  $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$  with the initial condition  $a_0 = 4$ .
- (d) Using generating functions, solve  $a_k = 3a_{k-1} + 2$  with the initial condition  $a_0 = 1$ .

[65 marks]

1. (a) Berapakah fungsi yang terdapat dari set  $\{1, 2, \dots, n\}$ , dengan integer positif  $n$ , ke set  $\{0, 1\}$  yang mengumpuk 0 ke 1 dan  $n$ ?
- (b) Berapa buku perlu dipilih dari 24 buku Matematik, 25 buku Sains Komputer, 21 buku Sastera dan 15 buku Ekonomi supaya sekurang-kurangnya 12 buku dari subjek yang sama terpilih?
- (c) Abjad Inggeris mengandungi 21 konsonan dan lima huruf vokal. Berapa rentetan enam abjad daripada abjad Inggeris mengandungi setepat-tepatnya satu huruf vokal?
- (d) Berapa rentetan lapan bit dengan tepat dua 1 sedemikian huruf 1 tersebut tidak bersebelahan?
- (e) Berapa cara enam abjad berbeza dapat dikirim jika kita boleh guna tiga kurier?
- (f) Berapa cara 7 orang dapat disusun mengelilingi satu meja bulat jika dua orang sentiasa duduk bersebelahan? (Kedudukan dianggap sama jika mereka diperoleh dari satu sama lain dengan memutar meja).
- (g) Berapa nombor 9-digit berbeza dapat dibentuk dengan menggunakan digit-digit dalam nombor 5363565?

[35 markah]

2. (a) Nombor Fibonacci memenuhi hubungan  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , dengan syarat awal  $f_0 = 0, f_1 = 1$ . Selesaikan hubungan jadi semula ini dan cari rumus tersirat untuk nombor Fibonacci.
- (b) Cari penyelesaian untuk hubungan jadi semula  $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$  dengan syarat awal  $a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$ .
- (c) Cari penyelesaian untuk hubungan jadi semula  $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$  dengan syarat awal  $a_0 = 4$ .
- (d) Dengan menggunakan fungsi penjana, selesaikan  $a_k = 3a_{k-1} + 2$  dengan syarat awal  $a_0 = 1$ .

[65 markah]

3. (a) State the Handshaking theorem for an undirected graph  $G$ . Using this theorem, prove the following :
- (i)  $G$  has an even number of odd degree vertices
  - (ii) if  $M$  is the maximum degree and  $m$  is the minimum degree of the vertices of  $G$ , then

$$m \leq \frac{2e}{v} \leq M,$$

where  $v$  is the number of vertices and  $e$  is the number of edges of  $G$ .

- (b) Show that if a simple graph  $G$  has  $k$  connected components and these components have  $n_1, n_2, \dots, n_k$  vertices respectively, then the number of edges of  $G$  does not exceed  $\sum_{i=1}^k C(n_i, 2)$  where  $C(n, r)$  is the number of  $r$ -combinations of  $n$  elements.
- (c) Which of the following are Euler graphs and/or Hamilton graphs?  
i)  $K_4$  ii)  $C_5$  iii)  $K_{3,3}$ .

[50 marks]

4. (a) State Euler's formula on the number of regions of a planar graph. Using this formula, prove the following :
- (i) if  $G$  is a connected planar simple graph with  $v$  vertices and  $e$  edges where  $v \geq 3$ , then  $e \leq 3v - 6$ .
  - (ii) the complete graph  $K_5$  is non-planar.
- (b) Define the chromatic number of a graph. Find this for the graphs:  
i)  $K_5$  ii)  $K_{3,4}$  iii)  $C_4$
- (c) Show that a tree with  $n$  vertices has  $n-1$  edges.

[50 marks]

3. (a) Nyatakan teorem Jabat Tangan untuk graf tak berarah. Dengan menggunakan teorem ini, buktikan
- (i)  $G$  mempunyai satu nombor genap untuk bucu berdarjah ganjil  
(ii) jika  $M$  ialah darjah maksimum dan  $m$  ialah darjah minimum untuk bucu bagi  $G$ , maka

$$m \leq \frac{2e}{v} \leq M,$$

dengan  $v$  ialah bilangan bucu dan  $e$  ialah bilangan tepi untuk  $G$ .

- (b) Tunjukkan bahawa jika graf ringkas  $G$  mempunyai  $k$  komponen terkait dan komponen-komponen ini mempunyai  $n_1, n_2, \dots, n_k$  bucu masing-masing, maka bilangan tepi untuk  $G$  tidak melebihi  $\sum_{i=1}^k C(n_i, 2)$  dengan  $C(n, r)$  ialah bilangan  $r$ -kombinasi untuk  $n$  elemen.
- (c) Yang mana berikut ialah graf Euler dan/atau graf Hamilton?  
i)  $K_4$  ii)  $C_5$  iii)  $K_{3,3}$ .

[50 markah]

4. (a) Nyatakan rumus Euler untuk bilangan rantau bagi satu graf satah. Dengan menggunakan rumus ini, buktikan bahawa
- (i) jika  $G$  ialah graf ringkas satah terkait dengan  $v$  bucu dan  $e$  tepi sedemikian  $v \geq 3$ , maka  $e \leq 3v - 6$ .  
(ii) graf lengkap  $K_5$  adalah tak bersatah.
- (b) Beri takrif untuk nombor kromatik suatu graf. Cari nombor ini untuk graf:

$$i) K_5 \quad ii) K_{3,4} \quad iii) C_4$$

- (c) Tunjukkan bahawa satu pokok dengan  $n$  bucu mempunyai  $n-1$  tepi.

[50 markah]