
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2008/2009

April/May 2009

MSS 301 – Complex Analysis
[Analisis Kompleks]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) Prove that if $|a|=1$ and $|b| \neq 1$, then $\left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right| = 1$.
- (b) If z and w are two complex numbers, then show that $|z+w| \leq |z|+|w|$. Discuss the case of equality.
- (c) Find all the values of $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{3}{4}}$. Hence prove that the product of the values is 1.
- (d) Show that the function $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ is not differentiable at $z=0$, but the C-R equations are satisfied at $z=0$.

[50 marks]

2. (a) Find the analytic function $f(z) = u+iv$ if $u+v = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}$.
- (b) In a bilinear transformation $w = \frac{az+b}{cz+d}$, what happens when $ad-bc=0$? Show that $w = \frac{z-1}{z+1}$ maps the imaginary axis in the z -plane onto the circle $|w|=1$? What portion of the z -plane corresponds to the interior of the circle $|w|=1$?
- (c) Find the invariant points of the transformation $w = -\frac{2z+4i}{iz+1}$. Prove also that these two points together with any point z and its image w form a set of four points having a constant cross ratio.

[50 marks]

3. (a) Evaluate $\int_C |z| \bar{z} dz$ where C is the closed curve consisting of the upper semicircle $|z|=1$ and the segment $-1 \leq x \leq 1$.
- (b) Evaluate the integral $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ when
- the point 0 lies inside and the point 1 is outside C .
 - the point 1 lies inside and the point 0 is outside C .
 - the point 0 and 1 both lie inside C .
- (c) If $f(z) = \frac{z+4}{(z+3)(z-1)^2}$ find Laurent's series expansions in
- $0 < |z-1| < 4$ and
 - $|z-1| > 4$.

1. (a) Buktikan bahawa jika $|a|=1$ dan $|b| \neq 1$, maka $\left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right| = 1$.
- (b) Jika z dan w adalah dua nombor kompleks, tunjukkan bahawa $|z+w| \leq |z|+|w|$. Bincangkan kes kesamaan.
- (c) Cari semua nilai untuk $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^4$. Dengan itu tunjukkan bahawa hasil darab nilai-nilai tersebut ialah 1.
- (d) Tunjukkan bahawa fungsi $f(z) = \begin{cases} \frac{(\bar{z})^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ tak terbezakan pada $z = 0$, tetapi memenuhi persamaan-persamaan C-R pada $z \neq 0$.

[50 markah]

2. (a) Cari fungsi analitik $f(z) = u+iv$ jika $u+v = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}$.
- (b) Dalam transformasi bilinear $w = \frac{az+b}{cz+d}$, apa akan berlaku apabila $ad-bc = 0$? Tunjukkan bahawa $w = \frac{z-1}{z+1}$ memetakan paksi khayalan dalam satah z keseluruhan bulatan $|w|=1$? Bahagian mana dalam satah z bersepadan dengan pedalaman bulatan $|w|=1$?
- (c) Cari titik-titik tak berubah bagi transformasi $w = -\frac{2z+4i}{iz+1}$. Buktikan juga bahawa kedua-dua titik ini dan sebarang titik z bersama imejnya w membentuk satu set empat titik yang mempunyai nisbah silang malar.

[50 markah]

3. (a) Nilaikan $\int_C |z| \bar{z} dz$ dengan C ialah lengkung tertutup yang terdiri daripada semi bulatan atas $|z|=1$ dan segmen $-1 \leq x \leq 1$.
- (b) Nilaikan kamiran $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ apabila
- titik 0 terletak di dalam dan titik 1 di luar C .
 - titik 1 terletak di dalam dan titik 0 di luar C .
 - titik-titik 0 dan 1 kedua-duanya terletak di dalam C .
- (c) Jika $f(z) = \frac{z+4}{(z+3)(z-1)^2}$ cari siri perwakilan Laurent dalam
- $0 < |z-1| < 4$ dan
 - $|z-1| > 4$.

- (d) State Cauchy Integral formula for analytic functions. Deduce Poisson's Integral formula for harmonic functions.

[50 marks]

4. (a) Find the nature of singularities of the following functions.

(i) $f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$ at $z = \frac{\pi}{4}$.

(ii) $f(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$ at $z = \infty$.

- (b) Using the Residue theorem, evaluate $\int_C \frac{(z+1)}{z^2 + 2z + 4} dz$, where C is

$$|z + 1 + i| = 2.$$

- (c) Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4\cos \theta} d\theta$, using contour integration.

[50 marks]

- (d) Nyatakan rumus kamiran Cauchy untuk fungsi analitik. Deduksi rumus kamiran Poisson fungsi harmonik.

[50 markah]

4. (a) Cari sifat singular bagi fungsi-fungsi berikut

(i) $f(z) = \frac{1}{\sin z - \cos z}$ at $z = \frac{\pi}{4}$.

(ii) $f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}$ at $z = \infty$.

- (b) Dengan menggunakan teorem reja, nilaikan $\int_C \frac{(z+1)}{z^2+2z+4} dz$, dengan C

ialah $|z+1+i|=2$.

- (c) Nilaian $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5+4\cos\theta} d\theta$ dengan menggunakan kamiran kontur.

[50 markah]

- ooo O ooo -

