
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2008/2009

April/May 2009

MSS 211 – Modern Algebra
[Aljabar Moden]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all twelve** [12] questions.

[Arahan: Jawab **semua dua belas** [12] soalan.]

Part 1

1. Is $C_2 \times C_2$ isomorphic to C_4 ? Verify your answer. [20 marks]
2. Is the converse of Lagrange theorem true? If yes, prove it. If no, give a counter example [50 marks]
3. Give an example of ring that has zero divisor [30 marks]
4. Give an example of integral domain that is not a field. [30 marks]
5. Give a cyclic subgroup of S_4 that has order 4 [20 marks]
6. Give an abelian subgroup of S_4 which is not cyclic and has order 4 [20 marks]
7. Give a non-abelian subgroup of S_4 [30 marks]
8. List all elements of $\langle 2, 3 \rangle$ where $2, 3 \in \mathbb{Z}_{12}$ [40 marks]

Bahagian 1

1. Adakah $C_2 \times C_2$ berisomorfisma dengan C_4 ? Justifikasikan jawapan anda.
[20 markah]
2. Adakah keterbalikan teorem Lagrange betul? Sekiranya ya, sila buktikan. Sekiranya tidak, sila berikan satu contoh lawan.
[50 markah]
3. Berikan satu contoh gelanggang yang mempunyai pembahagi sifar
[30 markah]
4. Berikan satu contoh domain integer yang bukan medan.
[30 markah]
5. Berikan satu subkumpulan kitaran bagi S_4 yang berperingkat 4
[20 markah]
6. Berikan satu subkumpulan abelian bagi S_4 yang bukan kitaran dan berperingkat 4
[20 markah]
7. Berikan satu subkumpulan tak abelian bagi S_4
[30 markah]
8. Senaraikan semua unsur $\langle 2,3 \rangle$ dengan $2,3 \in \mathbb{Z}_{12}$
[40 markah]

Part II

1. Let $H = \langle (1 \ 2 \ 3 \ 4) \rangle$ be a subgroup of D_4
- (a) Show that H is a normal subgroup of D_4 [80 marks]
- (b) Show that D_4/H is an abelian group. [40 marks]
2. Let $G = \mathbb{Z}_6$ and $G_1 = \mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$.
- (a) Construct ϕ_1 an isomorphism from $\langle G, +_6 \rangle$ to $\langle G_1, \times_7 \rangle$. Verify your answer. [50 marks]
- (b) Construct ϕ_2 a homomorphism from $\langle G, +_6 \rangle$ to $\langle G_1, \times_7 \rangle$ that is not one to one. Verify your answer. [40 marks]
- (c) Construct ϕ_3 , a one to one and onto function from G to G_1 that do not satisfy the homomorphism property. Verify your answer. [30 marks]
3. Let p be a prime number. Show that groups of order p is cyclic [40 marks]
4. Let $F_4 = \{0, 1, x, 1+x\}$. The addition and multiplication of F_4 are those in $P(\mathbb{R})$ which satisfy the following two conditions:
- (i) $1+x+x^2=0$
(ii) $a = \pm a \quad \forall a \in F_4$
- (a) Show that $F_4^* = F_4 \setminus \{0\}$ is a cyclic group generated by x [40 marks]
- (b) Show that F_4 is a field [40 marks]

Bahagian II

1. Biar $H = \langle (1 \ 2 \ 3 \ 4) \rangle$ suatu subkumpulan bagi D_4
- (a) Tunjukkan H adalah suatu subkumpulan normal bagi D_4 [80 markah]
- (b) Tunjukkan D_4/H adalah suatu kumpulan abelian. [40 markah]
2. Biar $G = \mathbb{Z}_6$ dan $G_1 = \mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$.
- (a) Binakan ϕ_1 suatu isomorfisma dari $\langle G, +_6 \rangle$ ke $\langle G_1, \times_7 \rangle$. Justifikasikan jawapan anda. [50 markah]
- (b) Binakan ϕ_2 suatu homomorfisma dari $\langle G, +_6 \rangle$ ke $\langle G_1, \times_7 \rangle$ yang bukan satu ke satu. Justifikasikan jawapan anda. [40 markah]
- (c) Binakan ϕ_3 , suatu fungsi satu ke satu dan menyeluruh dari G ke G_1 yang tidak mematuhi sifat homomorfisma. Justifikasikan jawapan anda. [30 markah]
3. Biar p ialah suatu nombor perdana. Tunjukkan kumpulan yang berperingkat p adalah kitaran [40 markah]
4. Biar $F_4 = \{0, 1, x, 1+x\}$. Penambahan dan pendaraban bagi F_4 adalah seperti yang tertakrif di $P(\mathbb{R})$ yang mematuhi kedua-dua syarat berikut:
- (i) $1+x+x^2=0$
(ii) $a = \pm a \quad \forall a \in F_4$
- (a) Tunjukkan $F_4^* = F_4 \setminus \{0\}$ adalah suatu kumpulan kitaran yang dijana oleh x [40 markah]
- (b) Tunjukkan F_4 adalah suatu medan [40 markah]

