
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2008/2009

April/May 2009

MGM 511 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) Consider the basis $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ for R^3 , where $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ and let $L: R^3 \rightarrow R^3$ be the linear transformation such that $L(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $L(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Express $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$ as a linear combination of v_1, v_2, v_3 and hence find a formula for $L(x)$. Using this formula, compute $L(y)$ for $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (b) Find the standard matrix representation for the following linear operators L :

- (i) L doubles the length of each vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in R^2 and rotates it 30° in the counter-clockwise direction
- (ii) L reflects each vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ about the line $x_2 = x_1$ and then projects it onto the x_1 axis.

- (c) Let $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and let L be the linear transformation from R^2 into R^3 defined by $L(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + (x_1 + x_2) b_3$, where $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Find the matrix A representing L with respect to the bases $[e_1, e_2]$ and $[b_1, b_2, b_3]$.

[50 marks]

1. (a) Pertimbangkan asas $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ untuk R^3 , dengan

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } L: R^3 \rightarrow R^3 \text{ ialah transformasi linear}$$

$$\text{sedemikian } L(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, L(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, L(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Nyatakan } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$$

sebagai satu gabungan linear v_1, v_2, v_3 dan dengan itu cari satu rumus

$$\text{untuk } L(x). \text{ Dengan menggunakan rumus ini, hitung } L(y) \text{ untuk } y = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Cari matrix wakilan untuk pengoperasi linear L berikut:

(i) L mengandakan panjang setiap vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dalam R^2 dan memutarkannya 30° dalam arah lawan jam.

(ii) L memantulkan setiap vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ terhadap garis $x_2 = x_1$ dan mengunjurnya ke atas paksi x_1 .

(c) Andaikan $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan L transformasi linear dari R^2 ke

R^3 yang ditakrif oleh $L(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + (x_1 + x_2) b_3$, dengan $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Cari matriks A yang mewakili L merujuk kepada asas-asas $[e_1, e_2]$ dan $[b_1, b_2, b_3]$.

[50 markah]

2. (a) Let $\{v_1, \dots, v_n\}$ be a basis for a vector space V and let L_1 and L_2 be two linear transformations mapping V into a vector space W . Show that, if $L_1(v_i) = L_2(v_i)$ for each $i = 1, \dots, n$ then $L_1(v) = L_2(v)$ for all $v \in V$.

- (b) Let $E = [u_1, u_2, u_3]$ and $F = [b_1, b_2]$ where $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Find the matrix representing the linear transformation

L from R^3 into R^2 with respect to the ordered bases E and F , given

- (i) $L(x) = (2x_2, -x_1)^T$
 (ii) $L(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$.

- (c) If the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ represents a linear transformation L on R^3

find a basis for

- (i) the kernel of L
 (ii) the range of L .

[50 marks]

3. (a) Define the orthogonal complement S^\perp of a subspace S of R^n and show that S^\perp is also a subspace of R^n .

- (b) If $\{x_1, \dots, x_r\}$ is a basis for a subspace S of R^n , and $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ is a basis for S^\perp , show that $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$ is a basis for R^n . Deduce that

- (i) R^n is the direct sum of S and S^\perp
 (ii) $(S^\perp)^\perp = S$.

[50 marks]

2. (a) Andaikan $\{v_1, \dots, v_n\}$ asas untuk ruang vektor V dan L_1 dan L_2 dua transformasi linear dari V ke ruang vektor W . Tunjukkan bahawa, jika $L_1(v_i) = L_2(v_i)$ untuk setiap $i = 1, \dots, n$ maka $L_1(v) = L_2(v)$ untuk semua $v \in V$.

(b) Andaikan $E = [u_1, u_2, u_3]$ dan $F = [b_1, b_2]$ dengan

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Cari matriks yang}$$

mewakili transformasi linear L dari R^3 ke R^2 merujuk kepada asas-asas tertertib E dan F , diberi

(i) $L(x) = (2x_2, -x_1)^T$

(ii) $L(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$.

(c) Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ mewakili transformasi linear L pada R^3

cari satu asas bagi

(i) inti untuk L

(ii) julat untuk L .

[50 markah]

3. (a) Takrifkan pelengkap ortogon S^\perp untuk subruang S dalam R^n dan tunjukkan bahawa S^\perp juga subruang dalam R^n .

(b) Jika $\{x_1, \dots, x_r\}$ ialah asas untuk subruang S dalam R^n dan $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ ialah asas untuk S^\perp , tunjukkan bahawa $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$ ialah asas untuk R^n . Deduksikan bahawa

(i) R^n ialah hasil tambah langsung untuk S dan S^\perp

(ii) $(S^\perp)^\perp = S$.

[50 markah]

4. Let $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$.

- (i) Use the Gram-Schmidt process to find an orthonormal basis for the column space of A .
- (ii) Factor A into a product QR , where Q has an orthonormal set of column vectors and R is upper triangular.
- (iii) Solve the least squares problem $Ax = b$.

[50 marks]

4. Andaikan $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$.

- (i) Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt, cari satu asas ortonormal untuk ruang lajur bagi A .
- (ii) Faktorkan A menjadi QR , dengan Q mempunyai satu set ortonormal untuk vektor lajur dan R ialah segitiga atas.
- (iii) Selesaikan masalah kuasadua terkecil $Ax = b$.

[50 markah]