

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
Academic Session 2008/2009

April/May 2009

**MGM 501 – Analysis**  
**[Analisis]**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all eight** [8] questions.

**Arahan:** Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

1. True/False questions. You should determine whether or not a statement is true.

**If a statement is false, you must provide a counter example**

- (a) Every bounded sequence is convergent.
- (b) Every convergent sequence is bounded.
- (c) If  $(a_n)$  is a sequence such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  and  $a_n \neq 0$  for all  $n$ , then  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ .
- (d) If  $(a_n)$  and  $(b_n)$  are sequences such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , then  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$  is either  $\infty$  or 0.
- (e) If  $f$  is continuous at  $a$ , then  $f$  is differentiable at  $a$ .
- (f) If  $f$  is differentiable at  $a$ , then  $f$  is continuous at  $a$ .
- (g) If  $f$  is one-to-one and differentiable on  $(a, b)$ , then  $f^{-1}$  exists and differentiable on  $(a, b)$ .
- (h) If a continuous function  $f$  attains its maximum at  $a$ , then  $f'(a) = 0$  or  $f'(a)$  does not exist.
- (i) If  $f$  is continuous on  $[a, b]$  such that  $f(a) = f(b)$ , then there is a point  $c \in (a, b)$  such that  $f'(c) = 0$ .
- (j) If  $f$  is a continuous and differentiable function on  $[0, 2]$ ,  $f(0) = 1$  and  $f(2) = 7$ , then there exists a point  $c \in (0, 2)$  such that  $f'(c) = 0$

[20 marks]

2. Explain why the function  $f(x) = \exp\left(\frac{x^3-15}{x^2+x+1}\right)$  is continuous and differentiable on  $[0, 1]$ . Does  $f$  attain minimum and maximum value on  $[0, 1]$ ? Justify your answer.

[7 marks]

3. Investigate whether or not the following sequence  $(a_n)$  is convergent. If the sequence is convergent, then you must find the limit.

(a)  $(a_n) = \left( \sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots \right)$ .

(b)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  for all  $n$ .

[15 marks]

1. Soalan Benar/Palsu. Anda harus tentukan samada suatu pernyataan adalah benar. Jika pernyataan adalah palsu, anda mesti memberikan satu contoh yang bercanggah.

- (a) Setiap jujukan terbatas adalah menumpu.
- (b) Setiap jujukan menumpu adalah terbatas.
- (c) Jika  $(a_n)$  adalah suatu jujukan yang  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  dan  $a_n \neq 0$  bagi setiap  $n$ , maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ .
- (d) Jika  $(a_n)$  dan  $(b_n)$  adalah jujukan-jujukan yang  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$  adalah  $\infty$  atau  $0$ .
- (e) Jika  $f$  adalah selanjur pada  $a$ , maka  $f$  adalah terbezakan pada  $a$ .
- (f) Jika  $f$  adalah terbezakan pada  $a$ , maka  $f$  adalah selanjur pada  $a$ .
- (g) Jika  $f$  adalah satu dengan satu dan terbezakan pada  $(a, b)$ , maka  $f^{-1}$  wujud dan terbezakan pada  $(a, b)$ .
- (h) Jika  $f$  suatu fungsi selanjur yang mencapai maksimum pada  $a$ , maka  $f'(a) = 0$  atau  $f'(a)$  tidak wujud.
- (i) Jika  $f$  adalah selanjur pada  $[a, b]$  sedemikian  $f(a) = f(b)$ , maka terdapat satu titik  $c \in (a, b)$  sedemikian  $f'(c) = 0$ .
- (j) Jika  $f$  adalah suatu fungsi selanjur dan terbezakan pada  $[0, 2]$ ,  $f(0) = 1$  dan  $f(2) = 7$ , maka wujud satu titik  $c \in (0, 2)$  sedemikian  $f'(c) = 0$ .

[20 markah]

2. Terangkan mengapa fungsi  $f(x) = \exp\left(\frac{x^3-15}{x^2+x+1}\right)$  adalah selanjur dan terbezakan pada  $[0, 1]$ . Adakah  $f$  mencapai nilai minimum dan maksimum pada  $[0, 1]$ ? Justifikasikan jawapan anda.

[7 markah]

3. Tentukan samada jujukan  $(a_n)$  berikut adalah menumpu. Jika jujukan menumpu, maka cari hadnya.

(a)  $(a_n) = \left( \sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \dots \right)$ .

(b)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  untuk semua  $n$ .

[15 markah]

4. Let  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ .

(a) Prove that  $f$  is differentiable at 0.

(b) Prove that  $f$  is not differentiable at  $x \neq 0$ .

[15 marks]

5. Given a function  $f$  such that  $f(1) = 1$  and  $f'(1) = 2$ . Prove that  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^2 - 1}{x^2 - 1}$  exists, and then find the limit.

[10 marks]

6. Prove that there exists a real number  $x$  in the interval  $[1, 2]$  with property that  $2x^x = 3x$ .

[5 marks]

7. Let  $f$  be a continuous function on  $\mathbb{R}$ , of which it is known that  $f'(x)$  exists for all  $x \neq 0$  and that  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 3$ . Show that  $f'(0) = 3$ .

[15 marks]

8. (a) State the Theorem of Differentiability of Inverse Functions.

(b) Let  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  be an increasing and continuous function on  $[0, 1]$ , and suppose that  $f$  is twice differentiable on  $[0, 1]$  with  $f'(x) \neq 0$  for all  $x \in [0, 1]$ .

Let  $g = f^{-1}$ . Show that  $g''(x) = \frac{-f'[g(x)]}{(f'[g(x)])^3}$  is the formula for the second

derivative of  $f^{-1}$ .

[13 marks]

4. Biar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ditakrifkan sebagai  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(a) Buktikan  $f$  adalah terbezakan pada 0.

(b) Buktikan  $f$  adalah tidak terbezakan pada  $x \neq 0$ .

[15 markah]

5. Diberi suatu fungsi  $f$  sedemikian  $f(1) = 1$  dan  $f'(1) = 2$ . Buktikan  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^2 - 1}{x^2 - 1}$  wujud dan kemudian cari hadnya.

[10 markah]

6. Buktikan bahawa wujud suatu nombor nyata  $x$  dalam selang  $[1, 2]$  dengan sifatnya yang  $2x^x = 3x$ .

[5 markah]

7. Biar  $f$  suatu fungsi selanjat pada  $\mathbb{R}$ , diketahui bahawa  $f'(x)$  wujud bagi semua  $x \neq 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 3$ . Tunjukkan bahawa  $f'(0) = 3$ .

[15 markah]

8. (a) Nyatakan Teorem Keterbezakan Fungsi Songsang.

(b) Biar  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsi menokok dan selanjat pada  $[0, 1]$ , dan andaikan  $f$  terbezakan dua kali pada  $[0, 1]$  dengan  $f'(x) \neq 0$  bagi semua  $x \in [0, 1]$ . Biar  $g = f^{-1}$ . Tunjukkan bahawa  $g''(x) = \frac{-f'[g(x)]}{(f'[g(x)])^3}$  adalah fomula bagi terbitan kedua  $f^{-1}$ .

[13 markah]