
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2008/2009

Jun 2009

MAT 263 – Probability Theory
[Teori Kebarangkalian]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of TEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) In a certain region of the country it is known from past experience that the probability of selecting an adult over 45 years old of age with cancer is 0.04. If the probability of a doctor correctly diagnosing a person with cancer as having the disease is 0.78 and the probability of incorrectly diagnosing a person without cancer as having the disease is 0.06, what is the probability that a person having a cancer if he is diagnosed as having cancer? In your work, state where the concept of mutually exclusive is applicable.

[10 marks]

- (b) A random variable X has a following probability density function:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & ; 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & ; 2 \leq x < 3 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

Find the distribution function of X . Hence, using your result, compute $P(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2})$.

[15 marks]

- (c) Prove that if A_1, A_2, \dots, A_n are independent events, then

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)]$$

[10 marks]

- (d) For each of the following random variables X , determine the type of distribution that best model X . Give values for the parameters of the distributions chosen.

- (i) Calls to a customer care center are placed independently and at random. During an evening hours, the center receives an average of 100 calls an hour. Let X be the waiting time between consecutive calls tonight.
- (ii) A Rapid bus company offers express service between two cities that are 50 miles apart. A breakdown can occur anywhere along the travel route. There is no point on the route where a break down is more likely to occur than the other points. Let X be the location of the next breakdown.

1. (a) Di suatu kawasan di sebuah negara, diketahui dari pengalaman lalu bahawa kebarangkalian memilih seorang dewasa berumur lebih 45 tahun yang mempunyai penyakit barah ialah 0.04. Jika kebarangkalian seorang doktor adalah betul dalam menentukan seseorang itu mempunyai penyakit barah ialah 0.78 and kebarangkalian doktor adalah tidak betul dalam menentukan seseorang itu tidak mempunyai penyakit barah ialah 0.06, apakah kebarangkalian bahawa seseorang itu mempunyai penyakit barah jika dia dikatakan mempunyai penyakit barah? Dalam kerja anda, nyatakan di mana konsep saling eksklusif diaplikasikan.

[10 markah]

- (b) Suatu pemboleh ubah rawak X mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & ; 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & ; 2 \leq x < 3 \\ 0 & ; \text{sebaliknya} \end{cases}$$

Cari fungsi taburan bagi X . Seterusnya, dengan menggunakan keputusan anda, kira $P(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2})$.

[15 markah]

- (c) Buktikan bahawa jika A_1, A_2, \dots, A_n adalah peristiwa tak bersandar, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)]$$

[10 markah]

- (d) Bagi setiap pemboleh ubah rawak X berikut, tentukan jenis taburan yang terbaik untuk memodel X . Berikan nilai parameter bagi taburan yang pilihan anda.

- (i) Panggilan masuk ke suatu pusat khidmat pelanggan adalah secara rawak dan tak bersandar. Semasa waktu petang, pusat ini menerima purata 100 panggilan per jam. Katakan X adalah masa menunggu di antara panggilan berturutan malam ini.
- (ii) Syarikat bas Rapid menawarkan servis cepat antara dua pekan yang terletak 50 batu di antara satu sama lain. Kerosakan boleh berlaku di mana-mana sepanjang laluan perjalanan. Tidak terdapat tempat di laluan yang mana kerosakan lebih cenderung untuk berlaku di satu-satu tempat. Katakan X adalah lokasi kerosakan berikutnya.

- (iii) As part of grand opening promotion, a department store has advertised that every one-thousandth purchase made on opening day will be given to the customer for free. The store expects five purchases to be made every minute. Let X be the time from opening until the first purchase is given away.

[15 marks]

2. (a) A box contains 20 mangoes of which 8 are Sala and 12 are Harum Manis. A sample of mangoes is selected from the box.

- (i) What is the probability that 3 Sala are selected if a sample of 7 mangoes is selected without replacement?
 (ii) If the selection is done with replacement, what is the probability that 4 Harum Manis are observed before the first Sala?
 (iii) What is the probability that at most 5 mangoes have to be selected to observe a Sala if the selection is done as in (ii).
 (iv) What is the probability of observing 4 Harum Manis before the third Sala is observed if the selection is also done with replacement?

[20 marks]

- (b) A joint probability density function of X and Y is

$$f(x, y) = kx(1-x)y^2 \quad ; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

- (i) Find the value of k .
 (ii) Obtain the conditional probability of Y given X . Based on your result, what can you expect on the independence of X and Y .
 (iii) Compute $P(XY \leq 0.5)$.

[20 marks]

- (c) Let X be a random variable with a probability density function

$$f(x) = a + bx^2 \quad ; \quad 0 \leq x < 2$$

- (i) If $E(X^2) = \frac{8}{5}$, calculate a and b .
 (ii) Let X_1, X_2, \dots, X_7 be 7 independent observations for X . Obtain probability that 3 out of these 7 observations have values less than 0.5.

[10 marks]

3. (a) (i) Suppose that X_1 and X_2 are two random variables with correlation coefficient ρ . Show that the variance for $Y = X_1 + X_2$ is $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$ where σ_i 's are the standard deviations of X_i 's.

- (iii) Sebagai sebahagian dari promosi pembukaan, sebuah pasaraya mengiklankan bahawa setiap pembelian keseribu pada hari pembukaan akan diberi percuma kepada pembelinya. Pasaraya ini menjangkakan lima pembelian akan dibuat setiap minit. Katakan X adalah masa dari permulaan pembukaan sehingga ke pembelian yang diberi percuma.

[15 markah]

2. (a) Sebuah kotak mengandungi 20 mangga yang mana 8 adalah jenis Sala dan 12 adalah jenis Harum Manis. Suatu sampel mangga dipilih dari kotak ini.

- (i) Apakah kebarangkalian bahawa 3 mangga jenis Sala dipilih jika suatu sampel 7 mangga dipilih tanpa pengembalian?
 (ii) Jika pemilihan adalah dengan pengembalian, apakah kebarangkalian bahawa 4 mangga jenis Harum Manis dicerap sebelum mangga jenis Sala yang pertama?
 (iii) Apakah kebarangkalian bahawa sebanyak-banyaknya 5 mangga perlu dipilih untuk mencerap se biji mangga jenis Sala jika pemilihan adalah seperti di (ii).
 (iv) Apakah kebarangkalian mencerap 4 mangga jenis Harum Manis sebelum mangga jenis Sala ketiga dicerap jika pemilihan adalah juga dengan pengembalian?

[20 markah]

- (b) Suatu fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi X dan Y adalah

$$f(x, y) = kx(1-x)y^2 \quad ; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

- (i) Cari nilai k .
 (ii) Dapatkan kebarangkalian bersyarat bagi Y diberi X . Berdasarkan keputusan anda, apa yang anda jangka mengenai ketakbersandaran X dan Y .
 (iii) Kira $P(XY \leq 0.5)$.

[20 markah]

- (c) Katakan X adalah suatu pemboleh ubah rawak dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = a + bx^2 \quad ; \quad 0 \leq x < 1$$

- (i) Jika $E(X^2) = \frac{3}{5}$, kira a dan b .
 (ii) Katakan X_1, X_2, \dots, X_7 adalah 7 cerapan tak bersandar bagi X . Dapatkan kebarangkalian bahawa 3 daripada 7 cerapan ini mempunyai nilai kurang daripada 0.5.

[10 markah]

3. (a) (i) Katakan X_1 dan X_2 adalah dua pemboleh ubah rawak dengan pekali korelasi ρ . Tunjukkan bahawa varians bagi $Y = X_1 + X_2$ ialah $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$ yang mana σ_i adalah sisihan piawai bagi X_i .

- (ii) Let X_1 and X_2 be two random variables with $E(X_1) = 2$, $Var(X_1) = 9$, $E(X_2) = -3$ and $Var(X_2) = 16$. If $W = 3X_1 + X_2 - 3$, find $E(W)$ and $Var(W)$.

[15 marks]

- (b) Let $E(X) = 17$ and $E(X^2) = 298$ be the values from a continuous distribution.

- (i) Use Chebyshev's inequality to determine a lower bound for $P(10 < X < 24)$.
- (ii) Let \bar{X} be the mean of a random sample of size $n = 64$. Show how to approximate $P(10 < \bar{X} < 24)$.

[20 marks]

- (c) Suppose that the five random variables X_1, \dots, X_5 are independent and identically distributed and that each has a standard normal distribution. Determine a constant c such that the random variable

$$\frac{c(X_1 + X_2 + X_3)}{(X_4^2 + X_5^2)^{1/2}}$$

will have a t distribution.

[15 marks]

4. (a) Suppose that the random variables X and Y are independent and that each has a standard normal distribution. Show that the quotient X/Y has a t distribution with 1 degree of freedom.

[20 marks]

- (b) Suppose X_1 and X_2 are two random observations from a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$. Let $Y_1 = aX_1 + X_2$ and $Y_2 = X_1 + bX_2$ are two arbitrary linear functions of X_1 and X_2 . What is the joint distribution of Y_1 and Y_2 ?

[15 marks]

- (c) Suppose X and Y are two independent random variables with common p.d.f.

$$f(x) = e^{-x} \quad ; \quad x > 0$$

- (i) Obtain the probability density function of $U = X + Y$ and

$$V = \frac{X}{X + Y}.$$

- (ii) Are U and V independent? Justify your answer.

[15 marks]

- (ii) Katakan X_1 dan X_2 adalah dua pemboleh ubah rawak dengan $E(X_1) = 2$, $\text{Var}(X_1) = 9$, $E(X_2) = -3$ dan $\text{Var}(X_2) = 16$. Jika $W = 3X_1 + X_2 - 3$, cari $E(W)$ dan $\text{Var}(W)$.

[15 markah]

- (b) Biar $E(X) = 17$ dan $E(X^2) = 298$ sebagai nilai-nilai dari suatu pemboleh ubah rawak selanjar.

- (i) Guna ketaksamaan Chebyshev untuk menentukan suatu batas bawah bagi $P(10 < X < 24)$.

- (ii) Biar \bar{X} sebagai min bagi suatu sampel rawak bersaiz $n = 64$. Tunjukkan bagaimana untuk menganggar $P(10 < \bar{X} < 24)$.

[20 markah]

- (c) Katakan bahawa lima pemboleh ubah rawak X_1, \dots, X_5 adalah tertabur secaman dan tak bersandar dan setiap satu mempunyai taburan normal piawai. Tentukan suatu pemalar c supaya pemboleh ubah rawak

$$\frac{c(X_1 + X_2 + X_3)}{(X_4^2 + X_5^2)^{1/2}}$$

akan mempunyai suatu taburan t .

[15 markah]

4. (a) Katakan bahawa pemboleh ubah rawak X dan Y adalah tak bersandar dan setiap satu mempunyai taburan normal piawai. Tunjukkan bahawa hasil bahagi X/Y mempunyai suatu taburan t dengan darjah kebebasan 1.

[20 markah]

- (b) Katakan X_1 dan X_2 adalah dua cerapan rawak dari suatu taburan normal $N(\mu, \sigma^2)$. Biar $Y_1 = aX_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 + bX_2$ adalah dua fungsi linear sebarangan bagi X_1 dan X_2 . Apakah taburan tercantum bagi Y_1 dan Y_2 ?

[15 markah]

- (c) Katakan X dan Y adalah dua pemboleh ubah rawak tak bersandar dengan f.k.k. secaman

$$f(x) = e^{-x} \quad ; \quad x > 0$$

- (i) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi $U = X + Y$ dan

$$V = \frac{X}{X + Y}.$$

- (ii) Adakah U dan V tak bersandar? Tentusahkan jawapan anda.

[15 marks]

APPENDIX/LAMPIRAN

<i>DISCRETE DISTRIBUTIONS</i>	
Bernoulli	$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$ $M(t) = 1 - p + pe^t$ $\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p)$
Binomial	$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$ $M(t) = (1 - p + pe^t)^n$ $\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$
Geometric	$f(x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $M(t) = \frac{p}{1 - (1-p)pe^t}, \quad t < \ln(1-p)$ $\mu = \frac{1-p}{p}, \quad \sigma^2 = \mu = \frac{(1-p)}{p^2}$
Negative Binomial	$f(x) = \frac{(x+r-p)!}{x!(r-1)!} p^r (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $M(t) = \frac{p^r}{[1 - (1-p)e^t]^r}, \quad t < -\ln(1-p)$ $\mu = \frac{r(1-p)}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$
Poisson	$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ $\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$
Hipergeometric	$f(x) = \frac{\binom{n_1}{x} \binom{n_2}{r-x}}{\binom{n}{r}}, \quad x \leq r, x \leq n_1, r-x \leq n_2,$ $\mu = \frac{rn_1}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{rn_1 n_2 (n-r)}{n^2 (n-1)}$

CONTINUOUS DISTRIBUTION	
Uniform	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$ $M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0, \quad M(0) = 1$ $\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential	$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad 0 \leq x < \infty$ $M(t) = \frac{1}{1-\theta t}, \quad t < 1/\theta$ $\mu = \theta, \quad \sigma^2 = \theta^2$
Gamma	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}, \quad 0 \leq x < \infty$ $M(t) = \frac{1}{(1-\theta t)^\alpha}, \quad t < 1/\theta$ $\mu = \alpha\theta, \quad \sigma^2 = \alpha\theta^2$
Chi Square	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} r^{r/2-1} e^{-x/2}, \quad 0 \leq x < \infty$ $M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}, \quad t < \frac{1}{2}$ $\mu = r, \quad \sigma^2 = 2r$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\mu)^2/2\sigma^2]}, \quad -\infty < x < \infty$ $M(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ $E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2$
Beta	$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$ $\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$
t	$f(x) = \frac{\Gamma[(r+1)/2]}{\sqrt{\pi r} \Gamma(\frac{r}{2}) (1 + \frac{x^2}{r})^{(r+1)/2}}, \quad -\infty < x < \infty$

<i>FORMULA</i>	
1.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
2.	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad r < 1$
3.	$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} b^x a^{n-x} = (a+b)^n$
4.	$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \binom{r-n}{r-x} = \binom{n}{r}$
5.	$\sum_{x=0}^n \binom{n+k-1}{k} w^k = (1-w)^{-n}, \quad w < 1$
6.	$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$
7.	$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$
8.	$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$