
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2008/2009

April/May 2009

MAT 202 – Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

[Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

1. (a) Define supremum and infimum of a non-empty set S .
- (b) Find the supremum and the infimum of the set $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 10 < 0\}$. [$\mathbb{R}$ is the set of all real numbers]
- (c) Let $A = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \leq x\}$. Show that the supremum of this set exists and it is an integer. [$\mathbb{Z}^+$ is the set of all positive integers]
- (d) Let $f : X \rightarrow Y$ with $A, B \subset X$ and $U, V \subset Y$. Show that $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ and $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
- (e) Define countability of a non-empty set S . Show that the set of all rational numbers is countable.
- (f) Let B be a collection of circles centred at $(a, 0)$ with $a \in \mathbb{Z}^+$ and a radius $r \in \mathbb{Q}$. Show that the set B is countable.
[$\mathbb{Q}$ is the set of all rational numbers]

[100 marks]

1. (a) Takrifkan supremum dan infimum bagi suatu set S yang tidak kosong.
- (b) Dapatkan supremum dan infimum bagi set S berikut:
 $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 10 < 0\}$. [$\mathbb{R}$ set semua nombor nyata]
- (c) Biarkan $A = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \leq x\}$. Tunjukkan bahawa supremum bagi set ini wujud dan ianya adalah suatu integer. [$\mathbb{Z}^+$ set semua nombor integer positif]
- (d) Biarkan $f : X \rightarrow Y$ dengan $A, B \subset X$ dan $U, V \subset Y$. Tunjukkan bahawa $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ dan $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.
- (e) Takrifkan keterbilangan suatu set S yang tak kosong. Tunjukkan bahawa set semua nombor nisbah adalah terbilangkan.
- (f) Biarkan B satu koleksi bulatan yang berpusat pada $(a, 0)$ dengan $a \in \mathbb{Z}^+$ dan berjari $r \in \mathbb{Q}$. Tunjukkan bahawa set B adalah terbilangkan. [$\mathbb{Q}$ set semua nombor nisbah]

[100 markah]

2. (a) Let a_n be an infinite bounded sequence and, A is the set that contains all elements of a_n with $A \subset [a, b], a, b \in \mathbb{R}$. Dividing $[a, b]$ into 2 halves and choose one as I_1 , with $I_1 \cap A$ infinite. Repeating the same process with I_1 , gives us the following properties.
- (i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \dots$, with I_n a closed intervals for $n = 1, 2, 3, \dots$,
 - (ii) Length of I_n is $\frac{b-a}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,
 - (iii) For each set $A_n = I_n \cap A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ is infinite with $A_0 = A$. Show that there exists a subsequence a_{n_k} of a_n such that it converges to a point $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. [$\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers]
- (b) Let a_n be a sequence of the extended real number system. Define $\overline{\lim} a_n$ (limit superior of a_n) and $\underline{\lim} a_n$ (limit inferior of a_n). Let $y_n = \sup_{k \geq n} a_k$ and $z_n = \inf_{k \geq n} a_k$. Show that $\sup\{a_k : k \geq n+1\} \geq \inf\{a_k : k \geq n\}$. Finally, show that $\overline{\lim} a_n \geq \underline{\lim} a_n$.
- (c) Let $A = (-1, 10] \cap \mathbb{Q}$. Find the interior points, the limit points, the isolated points, and the boundary points of A .
- (d) Let $A \subset \mathbb{R}$, If a is a limit point of A , show that there exists a sequence $\{a_n\} \subset A$ such that $a_n \rightarrow a$. Is the converse true? If yes prove it, if not disprove using an example.
- (e) Define open cover and finite subcover of a real number set. Show that an open interval $(0, 1)$ has an open cover that does not have a finite subcover. Next, determine whether the set $(0, 1)$ is compact.

[100 marks]

2. (a) Biarkan a_n suatu jujukan yang terbatas yang tidak terhingga dan A adalah set yang mengandungi semua system-unsur dari a_n dengan $A \subset [a, b], a, b \in \mathbb{R}$. Membahagi dua selang $[a, b]$ kepada 2 sub selang yang mempunyai kepanjangan yang sama, dan pilih satu yang di tandakan dengan I_1 , dengan $I_1 \cap A$ adalah tak terhingga. Mengulangi proses yang sama kepada I_1 , akan memberikan yste-ciri berikut
- (i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \dots$, dengan I_n selang tertutup untuk setiap $n = 1, 2, 3, \dots$,
 - (ii) panjang I_n adalah $\frac{b-a}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,
 - (iii) untuk setiap set $A_n = I_n \cap A_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ adalah tak terhingga dengan $A_0 = A$. Tunjukkan bahawa wujud suatu subjujukan a_{n_k} kepada a_n dimana a_{n_k} menumpu ke satu nombor $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
[$\mathbb{N}$ adalah set semua nombor asli].
- (b) Biarkan a_n suatu jujukan di dalam system nombor nyata yang di perluaskan. Takrifkan $\overline{\lim} a_n$ (limit superior bagi a_n) dan $\underline{\lim} a_n$ (limit interior bagi a_n). Biarkan $y_n = \sup_{k \geq n} a_k$ dan $z_n = \inf_{k \geq n} a_k$.
Tunjukkan bahawa $\sup \{a_k : k \geq n+1\} \geq \inf \{a_k : k \geq n\}$. Seterusnya tunjukan $\overline{\lim} a_n \geq \underline{\lim} a_n$.
- (c) Biarkan $A = (-1, 10] \cap \mathbb{Q}$. Dapatkan titik pedalaman, titik had, titik terpecil dan titik sempadan set A .
- (d) Biarkan $A \subset \mathbb{R}$, Jika a adalah titik had bagi set A , Tunjukkan bahawa wujud suatu jujukan $\{a_n\} \subset A$ supaya $a_n \rightarrow a$. Adakah akasnya benar? Jika ya, buktikan, jika tidak berikan contoh.
- (e) Takrifkan tudung terbuka dan subtudung terhingga bagi satu set nombor nyata. Tunjukkan bahawa selang terbuka $(0, 1)$ mempunyai satu tudung terbuka yang tidak mempunyai sebarang subtudung terhingga. Seterusnya, tentukan sama ada set $(0, 1)$ adalah padat.

[100 markah]

3. (a) Define a disconnected (not connected) set. Give an example of a disconnected set. Identify the two open sets U, V that separate the set.
- (b) Let $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ is a uniformly continuous function on A . If $\{a_n\}$ a Cauchy sequence on A , show that $\{f(a_n)\}$ is also Cauchy.
- (c) Find the limit function if there exist, for the sequence of function $f_n = \frac{x^n}{2^n}, x \in \mathbb{R}$.
- (d) Let $\{f_n\}$ be bounded sequence of functions on a set A and converge to a function f on A . Define $R_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$. Show that if $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, $\{f_n\}$ converge uniformly to f on A .
- (e) Using the fact from (d), show that the sequence $\{f_n\}$ defined as $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ and $x \in [0, 1]$, converges uniformly on $[0, a]$ for each a with $0 \leq a < 1$, but does not converge uniformly on $[0, 1]$.

[100 marks]

3. (a) Takrifkan set tak terkait. Berikan satu contoh set tak terkait. Berikan set U dan V yang memisahkan set ini.
- (b) Biarkan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, fungsi selanjar secara seragam pada A . Jika $\{a_n\}$ jujukan Cauchy, tunjukkan bahawa $\{f(a_n)\}$ adalah Cauchy.
- (c) Dapatkan had fungsi, jika wujud bagi jujukan fungsi $f_n = \frac{x^n}{2^n}, x \in \mathbb{R}$.
- (d) Biarkan $\{f_n\}$ suatu jujukan fungsi yang terbatas pada set A dan menumpu ke fungsi f pada A . Takrifkan $R_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$. Tunjukkan bahawa jika $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, $\{f_n\}$ menumpu secara seragam ke f pada A .
- (e) Dengan menggunakan fakta dari (d), tunjukkan bahawa jujukan $\{f_n\}$ yang ditakrifkan sebagai $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ dan $x \in [0, 1]$, menumpu secara seragam pada $[0, a]$ untuk $0 \leq a < 1$, tetapi tidak menumpu secara seragam pada $[0, 1]$.

[100 markah]

