
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2008/2009

Jun 2009

MAT 101 – Calculus
[Kalkulus]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

1. (a) Find the following limits:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x + (x-1)^2}{2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \sin(3x)}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$

- (b) (i) Show that if f is differentiable at $x=0$, then f is continuous at $x=0$.
 (ii) Show that the converse of (i) is not true, namely give an example of a function f that is continuous at $x=0$ but not differentiable at $x=0$.

- (c) For $f(x) = \begin{cases} cx+3, & \text{if } x \leq 2 \\ cx^2-3, & \text{if } x > 2 \end{cases}$, find the value of the constant c such that f is continuous on $(-\infty, \infty)$.

[100 marks]

2. (a) (i) Write the statement of the Intermediate Value Theorem.
 (ii) What does it mean for a number c be a root of an equation $f(x) = 0$?
 (iii) Show that there is a root of $\cos x = x$ in the interval $(0, 1)$.

(b) The curve with equation $y^2 = x^3 + 3x^2$ is called the *Tschirnhausen cubic*.

(i) Find $\frac{dy}{dx}$.

(ii) Find an equation of the tangent line to this curve at the point $(1, 2)$.

(c) Consider the function $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ on the interval $[-1, 4]$.

- (i) Find the critical number of f .
 (ii) Find the local extremum of f .
 (iii) Does f have an inflection point?
 (iv) Find the extremum values of f on $[-1, 4]$.

[100 marks]

3. (a) Evaluate the following integrals.

(i) $\int \ln x \, dx$

(ii) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

1. (a) Cari had berikut:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x + (x-1)^2}{2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \sin(3x)}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$

(b) (i) Tunjukkan bahawa jika f terbezakan pada $x=0$, maka f adalah selanjar pada $x=0$.

(ii) Tunjukkan bahawa akas untuk (i) tidak benar, iaitu beri satu contoh fungsi yang selanjar pada $x=0$ tetapi tidak terbezakan pada $x=0$.

(c) Untuk $f(x) = \begin{cases} cx+3, & \text{if } x \leq 2 \\ cx^2-3, & \text{if } x > 2 \end{cases}$, cari nilai pemalar c supaya f adalah selanjar pada $(-\infty, \infty)$.

[100 markah]

2. (a) (i) Tulis pernyataan untuk Teorem Nilai Pertengahan.

(ii) Apakah maksud suatu nombor c ialah punca untuk persamaan $f(x) = 0$?

(iii) Tunjukkan bahawa terdapat suatu punca untuk $\cos x = x$ dalam selang $(0,1)$.

(b) Lengkung dengan persamaan $y^2 = x^3 + 3x^2$ disebut kubik Tschirnhausen.

(i) Cari $\frac{dy}{dx}$.

(ii) Cari suatu persamaan untuk garis tangen kepada lengkung ini pada titik $(1,2)$.

(c) Pertimbangkan fungsi $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3$ pada selang $[-1,4]$.

(i) Cari nilai genting untuk f .

(ii) Cari ekstremum setempat untuk f .

(iii) Adakah f mempunyai titik lengkok balas?

(iv) Cari nilai ekstremum untuk f pada $[-1,4]$.

[100 markah]

3. (a) Nilaikan kamiran berikut.

(i) $\int \ln x \, dx$

(ii) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

(b) Consider the functions $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ given by $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = \sqrt{x}$.

(i) Find the composite function $g \circ f$.

(ii) Differentiate $g \circ f$.

(iii) Evaluate the integral $\int_0^1 (g \circ f)(x) dx$.

(c) Write out the form of the partial fraction decomposition of the function

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

and determine the numerical values of the coefficients. Then evaluate the

integral $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$.

[100 marks]

4. (a) Sketch the graph of the curve $y = \frac{1}{x}$.

(b) Find the area of the region bounded by the curve $y = \frac{1}{x}$, the x -axis and the lines $x = 1$ and $x = 2$.

(c) Set up, but **do not** evaluate, an integral for the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y = \frac{1}{x}$ and the x -axis, between $x = 1$ and $x = 2$, around

(i) the x -axis

(ii) the line $x = 2$

(iii) the y -axis.

[100 marks]

(b) Pertimbangkan fungsi-fungsi $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang diberi oleh

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ dan } g(x) = \sqrt{x}.$$

(i) Cari fungsi gubahan $g \circ f$.

(ii) Bezakan $g \circ f$.

(iii) Nilaikan kamiran $\int_0^1 (g \circ f)(x) dx$.

(c) Tulis bentuk penghuraian pecahan separa untuk fungsi

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

dan tentukan nilai berangka pekali-pekalinnya. Kemudian nilaikan kamiran

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx.$$

[100 markah]

4. (a) Lakarkan graf untuk lengkung $y = \frac{1}{x}$.

(b) Cari luas rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = \frac{1}{x}$, paksi x dan garis-garis $x=1$ dan $x=2$.

(c) Bentukkan, **tanpa menilai**, kamiran untuk isipadu pepejal yang dijana dengan memutarakan rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = \frac{1}{x^2}$ dan paksi- x ,

di antara $x=1$ and $x=2$, sekitar

(i) paksi- x ,

(ii) garis $x=2$

(iii) paksi- y .

[100 markah]