

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

MSS 301/401 - Analisis Kompleks

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1.(a) Nilaikan $\left(16\sqrt{2} + \frac{32i}{\sqrt{2}}\right)^{1/5}$ (b) Cari lokus z apabila $\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$

- (c) (i) Nyatakan teorem de Moivre untuk index integer positif.
(ii) Cari semua penyelesaian untuk $z^6 + 1 = i\sqrt{3}$.

(12/100)

2.(a) Diberikan

$$f(z) = \begin{cases} |z|^{-2} (1+i) \operatorname{Im}(z^2), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

- (i) Tunjukkan $f(z)$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann pada $z = 0$.
(ii) Adakah $f(z)$ terbeza pada $z = 0$?

(b) Cari suatu fungsi konjugat harmonik untuk $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + 6$.

(16/100)

3.(a) Cari nilai z di mana $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz}$ menumpu.

(b) Ungkapkan $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}$ sebagai suatu siri Taylor atau Laurent (di mana yang sesuai) untuk rantau

- (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 2$

(12/100)

...2/-

- 4.(a) (i) Nyatakan teorem Liouville.
(ii) Tunjukkan $f(z)$ adalah fungsi malar jika $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analisis dan $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$.
- (b) Nyatakan mengapa $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}}$, $b \in \mathbb{R}$ tidak terbatas pada satah kompleks.

(12/100)

- 5.(a) Nyatakan rumus kamiran Cauchy untuk $f(z_0)$ dan $f'(z_0)$.
(b) Nilai kamiran berikut:

(i) $\int_{|z|=2} \frac{e^z + 1}{2} dz$ (ii) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z+4)}$ (iii) $\int_{|z|=2} \frac{e^z + 1}{(z-1)^2} dz$

(12/100)

6. Dengan menggunakan teorem Rouché, cari ketiga-tiga punca bagi $z^4 + 3z - 1 = 0$ yang terletak di dalam anulus $1 < |z| < 2$. Seterusnya, nyatakan yang mana nyata dan yang mana kompleks.

(12/100)

- 7.(a) Nyatakan teorem reja.
(b) Cari semua reja fungsi $f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z-i)^2}$ pada semua titik singularnya.
(c) Seterusnya nilaikan

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z-i)^2} dz$$

dengan menggunakan teorem reja.

(12/100)

8. Dengan menggantikan $z = e^{i\theta}$ dan mengamirkan di keliling bulatan unit, tunjukkan

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (a > b > 0)$$

Seterusnya, deduksikan

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$$

(12/100)

-ooo0ooo-