

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

MSG 464 - Rekabentuk & Analisis Ujikaji

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Huraikan prinsip-prinsip asas di dalam rekabentuk ujikaji

(20/100)

- (b) Masahayat komponen-komponen daripada dua pengeluar yang berbeza (A) diuji pada empat suhu pengoperasian (B) dan dua kadar kuasa (C). Tiga komponen diuji di bawah setiap gabungan rawatan. Andaikan semua faktor adalah tetap. Data dikutip diproses melalui prosedur ANOVA daripada SPSS.

Output diperolehi ditunjukkan seperti berikut :

*** ANALYSIS OF VARIANCE ***

Source of Variation	Sum of Squares	DF	Mean Square	F	Signif of F
Main Effects	6399615.000	5	1279923.000	7.230	.000
A	107920.333	1	107920.333	.610	.441
B	1925974.333	3	641991.444	3.627	.023
C	4365720.333	1	4365720.333	24.661	.000
2-way Interactions	3856479.667	7	550925.667	3.112	.013
A B	1348593.000	3	449531.000	2.539	.074
A C	168507.000	1	168507.000	.952	.337
B C	2339379.667	3	779793.222	4.405	.011
3-way Interactions	168475.667	3	56158.556	.317	.813
A B C	168475.667	3	56158.556	.317	.813
Explained	10424570.333	15	694971.356	3.926	.001
Residual	5664853.333	32	177026.667		
Total	16089423.667	47	342328.163		

.../2-

48 Cases were processed.
0 Cases (.0 PCT) were missing.

Huraikan kesimpulan-kesimpulan yang anda boleh memperolehi daripada kajian ini.
Gunakan $\alpha = .05$.

Nyatakan anggapan-anggapan yang telah anda gunakan.

(40/100)

- (c) Pertimbangkan ujikaji dalam (b).

Jika faktor B dan faktor C adalah rawak dan faktor A tetap, jalankan analisis anda dengan menganggap data dikutip adalah sama seperti dalam (b).

Berikan jadual bagi jangkakan min kuasa dua dan jadual ANOVA bagi analisis anda.

(40/100)

2. (a) Dalam pengeluaran komponen suatu mesin, garispusat terkedalam (G.T.) bagi suatu tiub besi waja adalah dimensi yang kritikal. Sampel-sampel bersaiz 10 telah diambil dan puratanya telah dihitung. Komponen-komponen ini boleh dihasilkan daripada 7 komposisi dan 7 mesin berlainan. Satu rekabentuk blok tak lengkap telah digunakan dengan mesin sebagai blok dan komposisi sebagai rawatan. Data berikut mewakili purata sisihan (dalam mm) bagi G.T. dari suatu nilai piawai tertentu:

Purata sisihan bagi G.T. (dalam mm)

Komposisi	Mesin							Jumlah
	1	2	3	4	5	6	7	
A	6	5	10					21
B			13	10	10			33
C	8			7		9		24
D			8			6	4	18
E	5				7		6	18
F		11			13	10		34
G		5		5			4	14
Jumlah	19	21	31	22	30	25	14	162

.../3-

$$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 1406$$

Ujikan pada paras keertian 5% hipotesis-hipotesis berikut :

- (i) tidak ada perbezaan di antara komposisi, dan
- (ii) tidak ada perbezaan di antara mesin.

(50/100)

- (b) Pengurus jualan bagi sebuah syarikat yang menjual kacang soya terbungkus melalui sebuah rangkaian supermarket yang mempunyai stor-stor di seluruh Malaysia berminat mengkaji hubungan di antara harga runcit barangan itu dan periklanan pada jualan runcit. Untuk mengkaji isu ini, pengurus tersebut merekod jualan y (dalam ribu unit), purata harga unit x_1 per bungkus, dan peratusan x_2 dari jumlah perbelanjaan yang diperuntukkan kepada periklanan bagi tahun yang lalu dalam setiap dari $n = 25$ rantau jualan.

Suatu program regresi SPSS telah digunakan untuk menyuaikan model peringkat dua

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 + \epsilon$$

kepada data. Sebahagian output yang diperolehi ditunjuk di bawah :

VARIABLE	MEAN	STANDARD DEVIATION		
1 (Y)	30.6519	7.9602		
2 (X1)	.3604	.0357		
3 (X2)	6.3600	1.7049		
4 (X1) SQ.	.1311	.0251		
5 (X2) SQ.	43.2400	22.5153		
6 (X1) (X2)	2.2840	.6285		
MULTIPLE R	.8396			
R SQUARE	.7049			
STD. ERROR	4.8598			
ANALYSIS OF VARIANCE				
	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F
REGRESSION	5	1072.065	214.413	9.080
RESIDUAL	19	448.678	23.615	

.../4-

VARIABLES IN THE EQUATION

VARIABLE	B	SE B	BETA	T
(CONSTANT)	134.0799			
X1	-628.4045	667.1304	-2.8183	-.9412
X2	2.4161	7.5804	.5175	.3187
X1SQ.	841.6853	907.5220	2.6540	.9275
X2SQ.	.2286	.3071	.6466	.7444
(X1) (X2)	-5.4993	21.9262	-.4342	-.2508

Huraikan kesimpulan-kesimpulan anda. Gunakan $\alpha = .05$ (jika diperlukan)

(25/100)

- (c) Suatu program regresi SPSS digunakan untuk menyuaikan model peringkat satu

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

kepada data dari (b) di atas. Sebahagian daripada output ditunjuk dibawah :

MULTIPLE R	.8281
R SQUARE	.6857
STD. ERROR	4.6604

ANALYSIS OF VARIANCE

	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F
REGRESSION	2	1042.917	521.458	24.009
RESIDUAL	22	447.826	21.719	

VARIABLES IN THE EQUATION

VARIABLE	B	SE B	BETA	T
(CONSTANT)	35.6170			
X1	-72.8205	26.8613	-.3271	-2.7110
X2	3.3458	.5635	.7166	5.9375

Ujikan sama ada model peringkat kedua yang disuaikan dalam (b) memberi suatu kemajuan apabila dipertimbangkan dengan model peringkat pertama. Iaitu, bagi model peringkat kedua dari (b), uji hipotesis

$$H_0 : \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0.$$

Gunakan $\alpha = .05$.

(25/100)

.../5-

3. (a) Seorang jurutera sedang mengkaji kesan kelajuan memotong terhadap kadar penanggalan logam dalam suatu operasi memesis. Walau bagaimanapun, kadar penanggalan logam ini juga terkandung dengan kekerasan spesimen ujian tersebut. Lima cerapan telah diambil pada setiap kelajuan memotong. Amaun logam yang ditanggalkan (y) dan kekerasan spesimen (x) dipamerkan dalam jadual berikut :

Kelajuan Memotong (rpm)

<u>1000</u>		<u>1200</u>		<u>1400</u>	
<u>y</u>	<u>x</u>	<u>y</u>	<u>x</u>	<u>y</u>	<u>x</u>
68	120	112	165	118	175
90	140	94	140	82	132
98	150	65	120	73	124
77	125	74	125	92	141
88	136	85	133	80	130

Jumlah 421 671 430 683 445 702

$$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 115, 148$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 285, 366$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}y_{ij} = 180, 946$$

- (i) Dirikan jadual analisis kovarians bagi data di atas.
- (ii) Dapatkan kesimpulan yang sesuai. Gunakan $\alpha = .05$.
- (iii) Hitungkan min rawatan terlaras dan ralat piawainya bagi data di atas.

(40/100)

- (b) Satu ujikaji telah dijalankan untuk meningkatkan hasil suatu proses bahan kimia. Tiga faktor telah dipilih, dan dua pereplikaan ujikaji rawak lengkap telah dijalankan. Data diperolehi adalah seperti berikut :

Gabungan rawatan	Pereplikaan		Jumlah
	I	II	
(1)	41	44	85
a	25	29	54
b	32	36	68
ab	34	31	65
c	28	29	57
ac	32	31	63
bc	39	33	72
abc	24	21	45

.../6

- (i) Cari anggaran bagi semua kesan faktorial.
- (ii) Ujikan, pada aras keertian $\alpha = .05$, kesan-kesan utama bagi ujikaji ini.

(30/100)

- (c) Bina rekabentuk 2^{7-2} dengan memilih dua saling tindak empat faktor sebagai penjana tak bersandar. Tuliskan struktur alias yang lengkap untuk rekabentuk ini. Kemukakan jadual analisis varians. Apakah peleraian rekabentuk ini?

(30/100)

4. (a) Tulis nota ringkas mengenai

- (i) rekabentuk tersarang
- (ii) rekabentuk belahan plot

(30/100)

- (b) Di bawah ialah hasil daripada suatu kajian yang menggunakan rekabentuk plot belahan. Tiga jenis baja B_1 , B_2 dan B_3 , dan dua persediaan tanah T_1 dan T_2 telah dijalankan bagi setiap plot tanah. Ujikaji telah dijalankan dalam dua blok dan data diperolehi ditunjuk dibawah :

Blok	Blok (B) (Plot Utama)	Persediaan Tanah (T) (sub-plot)	
		T_1	T_2
1	B_1	5	2
	B_2	8	5
	B_3	4	7
2	B_1	2	6
	B_2	5	5
	B_3	1	3

$$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 283$$

Huraikan kesimpulan-kesimpulan yang anda boleh memperoleh daripada analisis data ini. Gunakan $\alpha = .05$

(40/100)

...7/

- (c) Seorang jurutera perusahaan sedang mengkaji perubahan dimensi komponen tertentu yang dikeluarkan oleh tiga mesin. Setiap mesin mempunyai dua spindel, dan empat komponen dipilih secara rawak daripada setiap spindel. Data dikutip ditunjuk di bawah :

Mesin	1		2		3	
	1	2	1	2	1	2
Spindel	12	8	14	12	14	16
	9	9	15	10	10	15
	11	10	13	11	12	15
	12	8	14	13	11	14
Jumlah spindel, y_{ij}	44	35	56	46	47	60
Jumlah mesin, y_i	79		102		107	

$$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 3,582$$

Analisiskan data ini, dengan mengandaikan bahawa mesin dan spindel merupakan faktor tetap. Gunakan $\alpha = .05$

(30/100)

5. Tuliskan nota-nota pendek mengenai topik-topik yang berikut :

- (a) kontras-kontras ortogon
- (b) kaedah-kaedah regresi langkah demi langkah
- (c) polinomial ortogon

(100/100)

- ooo000ooo -

BERBAGAI RUMUS (Tatatanda seperti di dalam nota kuliah)1. Dua sampel tak bersandar ($n_1 < 25$ atau $n_2 < 25$)

$$s_p^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_j (y_j - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

2. Sampel berpasangan

$$s_d^2 = \frac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}$$

$$= \frac{\sum_i d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n - 1}$$

3. Analisis varian satu hala

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{j.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSA$$

Bagi sebarang kontras $L = \sum_i c_i y_{i.}$,

$$SSL = \frac{(\sum_i c_i y_{i.})^2}{(n \sum_i c_i^2)}$$

4. Rekabentuk blok rawakan

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSB = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSA - SSB$$

5. Rekabentuk segiempat sama Latin

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSR = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSC = \sum_k \frac{y_{..k}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SSA$$

6. Rekabentuk faktorial (dua faktor)

$$SST = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

- 3 -

$$SSB = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_{\text{sub-jumlah}} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSAB = SS_{\text{sub-jumlah}} - SSA - SSB$$

$$SSE = SST - SS_{\text{sub-jumlah}}$$

7. Korelasi dan regresi linear mudah

$$r^2 = \frac{\left(\sum_i x_i y_i - \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n} \right)^2}{\left[\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n} \right] \left[\sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{n} \right]}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n}}{\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\begin{aligned} SSE &= s_{yy} - \hat{\beta}_1^2 s_{xx} \\ &= s_{yy} - \hat{\beta}_1 s_{xy} \end{aligned}$$

$$s_{Y \cdot X}^2 = \frac{SSE}{n-2}$$

Anggaran ralat piawai bagi $\hat{\beta}_0$ ialah

$$\sqrt{\text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}} \right)}$$

Anggaran ralat piawai bagi $\hat{\beta}_1$ ialah

$$\sqrt{\text{MSE}/s_{xx}}$$

Selang peramalan $100(1 - \alpha)\%$ pada $x = x_0$:

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\text{MSE} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}$$

Selang keyakinan $100(1 - \alpha)\%$ pada $x = x_0$ bagi $\mu_{Y \cdot X_0}$ ialah

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}$$

8. Regresi linear berganda

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}'\underline{y}$$

$$\text{SSE} = \underline{y}'\underline{y} - \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{y}$$

$$\text{SSR} = \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{y} - (\sum y_i)^2/n$$

$$r_{12.3}^2 = \frac{(r_{12} - r_{13} r_{23})^2}{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-p}, \quad p = k+1$$

9. Polinomial ortogon

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \lambda_1 \left[\frac{x-\bar{x}}{d} \right]$$

$$P_2(x) = \lambda_2 \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^2 - \left(\frac{n^2-1}{12} \right) \right]$$

$$P_3(x) = \lambda_3 \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^3 - \left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right) \left(\frac{3n^2-7}{20} \right) \right]$$

$$P_4(x) = \lambda_4 \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^4 - \left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^2 \left(\frac{3n^2-13}{14} \right) + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560} \right]$$

$$\hat{\alpha}_j = \frac{\sum_{i=1}^n P_j(x_i) y_i}{\sum_{i=1}^n P_j^2(x_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

$$SSR(\alpha_j) = \hat{\alpha}_j \sum_{i=1}^n P_j(x_i) y_i$$

$$SSE(k) = S_{yy} - \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j \left[\sum_{i=1}^n P_j(x_i) y_i \right]$$

10. Pemilihan pembolehubah dan pembangunan model dalam regresi

$$R_p^2 = \frac{SSR(p)}{S_{yy}} = 1 - \frac{SSE(p)}{S_{yy}}$$

$$\overline{R_p^2} = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p} \right) (1 - R_p^2)$$

$$MSE(p) = \frac{SSE(p)}{n-p}$$

$$C_p = \frac{SSE(p)}{\hat{\sigma}^2} - (n-2p), \quad \text{di mana } \hat{\sigma}^2 \text{ adalah suatu anggaran } \sigma^2.$$

Rekabentuk Blok Tak Lengkap

$$N = ar = bk$$

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{a-1}$$

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Blok}} = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{k} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$Q_i = y_{i.} - \frac{1}{k} \sum_j n_{ij} y_{.j}, \quad i = 1, 2, \dots, a$$

$$SS_{\text{Rawatan (terlaras)}} = \frac{k \sum_i Q_i^2}{\lambda a}$$

$$SSE = SST - SS_{\text{Rawatan (terlaras)}} - SS_{\text{Blok}}$$

$$\text{Bagi Kontras } L = \sum_i c_i Q_i,$$

$$SSL = k \frac{\left(\sum_i c_i Q_i \right)^2}{\lambda a \sum_i c_i^2}$$

$$\text{Ralat piawai bagi suatu rawatan terlaras} = \sqrt{\frac{k \text{ MSE}}{\lambda a}}$$

$$Q_j = y_{.j} - \frac{1}{r} \sum_i n_{ij} y_{i.}, \quad j = 1, 2, \dots, b$$

$$SS_{\text{Blok (terlaras)}} = r \frac{\sum_j (Q_j)^2}{\lambda b}$$

Rekabentuk Faktorial (Tiga faktor)

$$SST = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i\dots}^2}{bcn} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SSB = \sum_j \frac{y_{\dots j\dots}^2}{acn} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SSC = \sum_k \frac{y_{\dots k\dots}^2}{abn} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (AB)}} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij\dots}^2}{cn} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (AC)}} = \sum_i \sum_k \frac{y_{i\dots k\dots}^2}{bn} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (BC)}} = \sum_j \sum_k \frac{y_{\dots j\dots k\dots}^2}{an} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (ABC)}} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{y_{ijk\dots}^2}{n} - \frac{y_{\dots}^2}{abcn}$$

$$SS_{A \times B} = SS_{\text{subjumlah (AB)}} - SS_A - SS_B$$

$$SS_{A \times C} = SS_{\text{subjumlah (AC)}} - SS_A - SS_C$$

$$SS_{B \times C} = SS_{\text{subjumlah (BC)}} - SS_B - SS_C$$

$$SS_{A \times B \times C} = SS_{\text{subjumlah (ABC)}} - SS_A - SS_B - SS_C \\ - SS_{A \times B} - SS_{A \times C} - SS_{B \times C}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{subjumlah (ABC)}}$$

Rekabentuk 2^k

$$\text{Kontras}_{AB \dots K} = (a \pm 1) (b \pm 1) \dots (k \pm 1)$$

$$AB \dots K = \frac{2}{n2^k} (\text{Kontras}_{AB \dots K})$$

$$SS_{AB \dots K} = \frac{1}{n2^k} (\text{Kontras}_{AB \dots K})^2$$

$$SS_{\text{curvature}} = \frac{n_F n_c (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C}$$

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_K x_K$$

Rekabentuk Tersarang1. Dua Tahap

$$SST = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_A = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_i \frac{y_{i..}^2}{bn}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_{B(A)}$$

2. Tiga Tahap

$$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcn}$$

$$SS_A = \sum_i \frac{y_{i...}^2}{bcn} - \frac{y_{....}^2}{abcn}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij..}^2}{cn} - \sum_i \frac{y_{i...}^2}{bcn}$$

$$SS_{C(B)} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{y_{ijk.}^2}{n} - \sum_i \sum_j \frac{y_{ij..}^2}{cn}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_{B(A)} - SS_{C(B)}$$

Analisis Kovarians

$$S_{yy} = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$S_{xx} = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$S_{xy} = \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$T_{yy} = \sum_i \frac{y_i^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$T_{xx} = \sum_i \frac{x_i^2}{n} - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$T_{xy} = \sum_i \frac{(x_i)(y_i)}{n} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy}$$

$$E_{xx} = S_{xx} - T_{xx}$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy}$$

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

$$SS_E = E_{yy} - (E_{xy})^2 / E_{xx}$$

$$SS'_E = S_{yy} - (S_{xy})^2 / S_{xx}$$

$$MSE = \frac{SSE}{a(n - 1) - 1}$$

$$\bar{y}_{i(\text{terlaras})} = \bar{y}_i - \hat{\beta} (\bar{x}_i - \bar{x}_..), i = 1, 2, \dots, a$$

$$S_{\bar{y}_{i(\text{terlaras})}} = \left[MSE \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_..)^2}{E_{xx}} \right) \right]^{1/2}$$

X. Coefficients of Orthogonal Polynomials^a

x_j	$n=3$		$n=4$			$n=5$				$n=6$					$n=7$					
	P_1	P_2	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	-1	1	-3	1	-1	-2	2	-1	1	-5	5	-5	1	-1	-3	5	-1	3	-1	1
2	0	-2	-1	-1	3	-1	-1	2	-4	-3	-1	7	-3	5	-2	0	1	-7	4	-6
3	1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6	-1	-4	4	2	-10	-1	-3	1	1	-5	15
4			3	1	1	1	-1	-2	-4	1	-4	-4	2	10	0	-4	0	6	0	-20
5						2	2	1	1	3	-1	-7	-3	-5	1	-3	-1	1	5	15
6										5	5	5	1	1	2	0	-1	-7	-4	-6
7														3	5	1	3	1	1	1
$\sum_{j=1}^n \{P_j(x_j)\}^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70	70	84	180	28	252	28	84	6	154	84	924
λ	1	3	8	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{21}{10}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{617}{84}$

x_j	$n=8$						$n=9$						$n=10$					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	-7	7	-7	7	-7	1	-4	28	-14	14	-4	4	-9	6	-42	18	-6	3
2	-5	1	5	-13	23	-5	-3	7	7	-21	11	-17	-7	2	14	-22	14	-11
3	-3	-3	7	-3	-17	9	-2	-8	13	-11	-4	22	-5	-1	35	-17	-1	10
4	-1	-5	3	9	-15	-5	-1	-17	9	9	-9	1	-3	-3	31	3	-11	6
5	1	-5	-3	9	15	-5	0	-20	0	18	0	-20	-1	-4	12	18	-6	-8
6	3	-3	-7	-3	17	9	1	-17	-9	9	9	1	1	-4	-12	18	6	-8
7	5	1	-5	-13	-23	-5	2	-8	-13	-11	4	22	3	-3	-31	3	11	6
8	7	7	7	7	7	1	3	7	-7	-21	-11	-17	5	-1	-35	-17	1	10
9							4	28	14	14	4	4	7	2	-14	-22	-14	-11
10													9	6	42	18	6	3
$\sum_{j=1}^n \{P_j(x_j)\}^2$	168	168	264	616	2184	264	60	2772	990	2002	468	1980	330	132	8580	2860	780	660
λ	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{60}$	1	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{60}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{240}$

^aAdapted with permission from *Biometrika Tables For Statisticians*, Vol. 1, 3rd edition by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

VII. Significant Ranges for Duncan's Multiple Range Test^a

		$r_{01}(p, f)$											
		p											
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	
2	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.3	9.3	9.3	
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.5	7.5	7.5	
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.8	6.8	6.8	
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.3	6.3	6.3	
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	6.0	6.0	6.0	
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.8	5.8	5.8	
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.7	5.7	5.7	
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55	
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39	
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26	
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15	
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07	
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00	
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94	
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89	
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85	
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82	
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79	
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71	
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69	
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66	
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65	
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68	

f = degrees of freedom.

^a Reproduced with permission from "Multiple Range and Multiple t Tests," by D. B. Duncan, *Biometrics*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-42, 1955.

.../7

VII. Significant Ranges for Duncan's Multiple Range Test (continued)

		$r_{05}(p, f)$											
		p											
f	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	3.61	
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48	
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48	
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47	
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47	
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47	
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47	
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47	
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47	
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47	
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47	
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47	
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47	
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48	
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53	
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67	

f = degrees of freedom.