UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua, Sidang Akademik 1999/2000

Februari 2000

MSG 284 – Geometri Berkomputer

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1.(a) (i) Dengan menggunakan polinomial Lagrange, dapatkan polinomial kubik yang melalui titik-titik $\begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Nyatakan satu kelemahan interpolasi polinomial dan terangkan bagaimana kelemahan ini dapat diatasi.

(34/100)

(b) (i) Suatu objek pada kedudukan (x, y) diputarkan terhadap asalan sebanyak sudut θ dalam arah lawan jam. Jika kedudukan baru objek ialah (x^*, y^*), buktikan bahawa

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

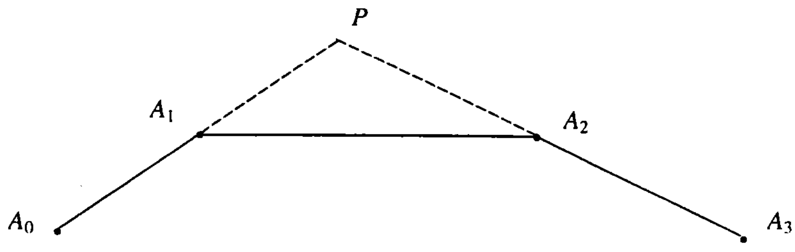
(ii) Objek A yang berada pada $(-1, 3)$ diputarkan terhadap asalan sebanyak sudut $\frac{2\pi}{3}$ dalam arah lawan jam dan kemudian dikenakan pengskalaan dengan faktor 2 dalam arah x.
Dapatkan kedudukan baru objek A.

(33/100)

(c) (i) Jika lengkung Bézier $\sum_{i=0}^{2} V_i B_i^2(t)$, $t \in [0, 1]$, ditingkatkan darjah menjadi $\sum_{i=0}^{3} V_i^* B_i^3(t)$, tuliskan hubungan di antara $\{ V_i^* : i = 0, 1, 2, 3 \}$ dan $\{ V_i : i = 0, 1, 2 \}$.

...2/-

(ii) Dalam rajah yang berikut, titik A_1 merupakan titik tengah A_0P dan titik A_2 adalah titik tengah A_3P.



Jika lengkung kubik Bézier r mempunyai A_0, A_1, A_2 dan A_3 sebagai titik kawalan, iaitu

$$r(t) = \sum_{i=0}^{3} A_i \, B_i^3(t), \qquad t \in [0, 1],$$

tentukan sama ada lengkung r dapat diturunkan ke darjah 2 secara tepat. Berikan alasan.

(33/100)

2.(a) Lengkung Bézier kubik r diberikan sebagai

$$r(t) = \sum_{i=0}^{3} V_i \, B_i^3(t), \qquad t \in [0, 1], \quad V_i \in R^2, \; i = 0, 1, 2, 3.$$

(i) Cari $r'(0)$ dan $r''(0)$ dalam bentuk ΔV_i.

(ii) Cari kelengkungan bagi r pada $t = 0$.

(iii) Jika titik kawalan V_0, V_1, V_2 adalah titik yang tak sama tetapi segaris, apakah yang boleh dikatakan tentang nilai kelengkungan bagi r pada $t = 0$? Berikan alasan untuk jawapan anda.

(iv) Fungsi H_0, H_1, $\overline{H}_0$ dan $\overline{H}_1$ merupakan fungsi Hermite kubik, iaitu

$$H_0(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3,$$
$$H_1(u) = 3u^2 - 2u^3,$$
$$\overline{H}_0(u) = u - 2u^2 + u^3,$$
$$\overline{H}_1(u) = -u^2 + u^3, \quad u \in [0, 1].$$

Jika lengkung r dinyatakan semula dalam bentuk Hermite kubik

$$A_0 H_0(u) + A_1 H_1(u) + D_0 \overline{H}_0(u) + D_1 \overline{H}_1(u), \quad u \in [0, 1]$$

cari A_0, A_1, D_0 dan D_1 dalam sebutan V_0, V_1, V_2 dan V_3.

(50/100)

...3/-

(b) Diberi permukaan hasil darab tensor Bézier

$$X(u,v) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} A_{ij}\; B_i^2(u)\; B_j^2(v),$$

$$u,\, v \in [0,\, 1], \quad A_{ij} \in R^3, \quad i,\, j = 0,\, 1,\, 2\,.$$

(i) Cari yang berikut dalam sebutan titik kawalan A_{ij}, $i, j = 0, 1, 2$:

$$X_u(0,0)$$
$$X_v(0,0)$$
$$X_{uv}(0,\, 0)$$

(ii) Jika $A_{ij} = \begin{pmatrix} i \\ j \\ 2\,(i+j) \end{pmatrix}$ bagi $i, j = 0, 1, 2,$ dapatkan pada (0, 0) suatu vektor normal dan persamaan satah tangen bagi permukaan X.

(50/100)

3.(a) Huraikan yang berikut:

(i) Perwakilan berparameter dan tak tersirat bagi lengkung dan permukaan.

(ii) Kenapa kita memilih perwakilan berparameter dalam Reka Bentuk Geometri Berbantu Komputer.

(iii) Bagaimana kita memplot permukaan.

(30/100)

(b) Jelaskan maksud suatu fungsi

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (-\infty, a) \\ f_2(x), & x \in [a, \infty) \end{cases}$$

dengan $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, \infty)$.

(10/100)

(c) Andaikan fungsi B-splin seragam berdarjah n ditakrifkan sebagai

$$M_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} (x-i)_+^n\,.$$

(i) Tulis cebis-cebis polinomial $M_3(x)$ dalam selang [0, 4].

(ii) Tunjukkan $M_3(x) \in C^{(2)}(-\infty, \infty)$.

...4/-

(iii) Tunjukkan cebis-cebis $M_3(x)$ di atas boleh diparameterkan semula dalam selang [0, 1] sebagai

$$
\begin{aligned}
b_0(t) &= \frac{1}{6}t^3 && 0 \le t \le 1 \\
b_1(t) &= \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) && 0 \le t \le 1 \\
b_2(t) &= \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4) && 0 \le t \le 1 \\
b_3(t) &= \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) && 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$

Seterusnya jelaskan bagaimana satu lengkung B-splin dapat dibina jika diberi V_0, V_1, V_2 dan V_3 sebagai titik-titik kawalan.

(60/100)

4.(a) Jelaskan dengan terperinci algoritma Chaikin.

(30/100)

(b) Cebis polinomial ke-j lengkung B-splin kubik seragam boleh ditulis sebagai berikut

$$
S_j(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_j \\ V_{j+1} \\ V_{j+2} \\ V_{j+3} \end{bmatrix}
$$

dengan V_{j+i}, $i = 0, 1, 2, 3$ sebagai titik-titik kawalan.

(i) Nyatakan cara supaya lengkung di atas menginterpolasikan titik hujung.

(ii) Tuliskan lengkung kubik Bézier dalam bentuk matriks seperti di atas dengan W_{j+i}, $i = 0, 1, 2, 3$ sebagai titik-titik kawalan Bézier. Seterusnya dapatkan pertalian antara titik-titik kawalan B-splin dan Bézier. Jelaskan juga dari segi geometrinya.

(70/100)

- oooOooo -