UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

MKT 341 - Pengiraan Kejuruteraan

Masa : [3 Jam]

Jawab mana-mana EMPAT (4) soalan.

1. (a) Tunjukkan bahawa $f(x) = e^{2x} - x^3 - 2 = 0$ mempunyai suatu punca di antara $x = 0$ dan $x = 1$. Gunakan Kaedah Newton untuk mendapatkan punca ini, mulai dengan $x_0 = 0.5$ dan dengan menjalankan 3 lelaran. Apakah dimaksudkan dengan penumpuan Kuadratik? Jelaskan sama ada contoh di atas akan menumpu secara kuadratik.

   (b) Andaikan $f(x_0) = 0$ dan $f'(x_0) \neq 0$. Buktikan bahawa Kaedah Newton mempunyai ciri penumpuan Kuadratik.

   (c) Pertimbangkan sistem $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -1.5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & -2.5 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 6.2 \\ 8.8 \end{pmatrix}$$

   Huraikan A ke dalam bentuk $A = LU$. Gunakan ini untuk menyelesaikan $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ di atas. Adakah penyelesaian tepat? Jelaskan.

(100/100)

2. (a) Gunakan Kaedah Gauss-Seidel untuk menyelesaikan sistem

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 7.35 \\ 4.35 \\ 11.95 \end{pmatrix}$$

   Mulakan dengan $\underset{\sim}{x}^{(0)} = (1,1,1)^T$ dan jalankan 2 lelaran untuk mendapatkan $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ dan $\underset{\sim}{x}^{(2)}$. Adakah Kaedah ini menumpu untuk sistem di atas? Terangkan dengan jelas.

...2/-

(b) Untuk sistem $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$
dapatkan ketaksamaan

$$\frac{1}{\text{cond }(A)}\frac{\|\underset{\sim}{r}\|}{\|\underset{\sim}{b}\|} \leq \frac{\|\underset{\sim}{e}\|}{\|\underset{\sim}{x}\|} \leq \text{cond }(A)\frac{\|\underset{\sim}{r}\|}{\|\underset{\sim}{b}\|}$$

di mana $\underset{\sim}{r}$ dan $\underset{\sim}{e}$ ialah sisa dan ralat masing-masing.

(c) Pertimbangkan sistem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0.999 \end{pmatrix}\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 3.2989 \end{pmatrix}$$

(i) Dapatkan penyelesaian <u>tepat</u>.

(ii) Cari nombor syarat cond *(A)* dengan norma ∞.

(iii) Jika $\begin{pmatrix} 2.6 \\ -2 \end{pmatrix}$ diterima sebagai penyelesaian anggaran, kirakan sisa $\underset{\sim}{r}$ dan ralat $\underset{\sim}{e}$.
Bincangkan hubungan di antara $\underset{\sim}{r}$ dan $\underset{\sim}{e}$ untuk contoh ini melalui ketaksamaan di atas 2(b).

Adakah sistem di atas bersuasana tak sihat? Terangkan.

(100/100)

3. (a) Diberi jadual bagi fungsi *f(x)* seperti di bawah

x	$f(x)$
1.0	1.71828
1.2	2.12012
1.4	2.65520
1.6	3.35303
1.8	4.24965
2.0	5.38906
2.2	6.82501

(i) Bentukkan jadual beza sehingga $\Delta^4 f$.

(ii) Gunakan rumus Newton ke depan berorder 3 untuk mencari $f(1.15)$ dan berikan anggaran ralatnya.

(iii) Gunakan rumus Newton ke belakang berorder 3 untuk mencari $f(1.85)$ dan berikan anggaran ralatnya.

(iv) Cari x supaya $f(x) = 4.00$.

(b) Suatu polinomial darjah 3 diberikan oleh $f(-2) = 1, f(-1) = 6, f(0) = 5, f(1) = 4$.

(i) Gunakan rumus Lagrange untuk mendapatkan polinomial ini. Jangan ringkaskan jawapan.

(ii) Gunakan rumus Newton dengan pembentukan jadual beza untuk mendapatkan polinomial ini.

(iii) Adakah kedua-dua polinomial di atas sama? Terangkan.

(iv) Dapatkan $f(-0.5)$ dan $f'(0)$ melalui kedua-dua rumusan (i), (ii) di atas.

(100/100)

4. Diberi jadual bagi fungsi $f(x)$ seperti di bawah

x	$f(x)$
1.0	1.71828
1.2	2.12012
1.4	2.65520
1.6	3.35303
1.8	4.24965
2.0	5.38906
2.2	6.82501

(a) Gunakan rumus Simpson $\frac{1}{3}$ dan $\frac{3}{8}$ untuk mengira $\int_{1.0}^{2.2} f(x)dx$. Berikan ralat masing-masing.

...4/-

(b) Cari $f'(1.6)$ dengan rumus

(i) order satu

(ii) order dua

(iii) order tiga

Untuk setiap kes, berikan anggaran ralat masing-masing.

(c) Mulai dari persamaan (2) daripada rumus-rumus yang diberikan, atau secara lain, dapatkan rumus bagi $f'(x_0)$ seperti yang terkandung di persamaan (6).

(100/100)

5. Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = -2y + e^{-x}, y(0) = 3.$$

(a) Gunakan Kaedah Runge-Kutta order 4 untuk mencari $y(0.1)$ dengan $h = 0.1$. Berikan anggaran ralatnya.

(b) Gunakan Kaedah Euler ubahsuai untuk mencari $y(0.05)$ dan $y(0.1)$ dengan $h = 0.05$. Apakah nilai h yang sesuai jika ralatnya akan kurang daripada 10^{-4}.

(100/100)

- oooOOooo -

... 5/-

Rumus-Rumus

1. $x_i^{(m+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)}$

   $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

2. $P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0 + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$

3. $P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-2} + \binom{s+2}{3} \Delta^3 f_{-3} + \binom{s+3}{4} \Delta^4 f_{-4} + \ldots$

4. $P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4} \Delta^4 f_{-2} + \ldots$

5. $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, \ell_i(x)$ dengan $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$, $0 \leq i \leq n$.

6. $f'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Delta^n f_0)$

   $+ \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi)$

7. $Q = F(h) + Ch^n + O(h^m)$

   $Q \simeq \frac{r^n F(h) - F(h_b)}{r^n - 1}$, $h_b = rh \quad (r > 1)$

8. Ralat sejagat petua trapezium

   $= -\frac{1}{12} (b - a) h^2 f''(\xi)$

9. $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3} h (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + \ldots + 2f_{n-1}$

   $+ 4f_n + f_{n+1}) - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$

10. $\int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8} h (f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 3f_6 + \ldots + 2f_{n-2}$

    $+ 3f_{n-1} + 3f_n + f_{n+1}) - \frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$

11. $y_{n+1} = y_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6.0$

    $K_1 = hf(x_n, y_n)$

    $K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1)$

    $K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2)$

    $K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$