UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

MAT 420 - Persamaan Pembezaan Separa

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Tentukan jenis dan cari bentuk berkanun bagi persamaan:

$$u_{xx} + x^2.u_{yy} + x.u_x = 0, \quad x \neq 0$$

(20/100)

(b) Selesaikan:

$$u_{xx} + 2.u_{xy} = 3.u_{yy}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

$$u(x,\ 0) = \sin\ x, \quad u_y(x,0) = 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

(50/100)

(c) Cari siri Fourier bagi fungsi

$$f(x) = |\sin\ x|\ , \quad -\pi < x < \pi$$

dan dengan menggunakan siri ini, nilaikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

(30/100)

2. (a) Selesaikan:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\cdot u_{\theta\theta}=0,\ \ 0<r<1,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$u(1,\ \theta)=f(\theta),\quad 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

dengan fungsi f selanjar dan memenuhi $f(0)=f(2\pi)$, dan

$$|u(r,\ \theta)|\leq M \text{ bagi } 0\leq r\leq 1,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

(40/100)

(b) Selesaikan:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ \ 0<r<1,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$u(1,\ \theta)=\sin\ \theta+2\ \cos\ 3\theta,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

(10/100)

(c) Selesaikan:

$$u_t=u_{xx},\quad 0<x<1,\ \ t>0$$

$$u(0,\ t)=1,\ \ u(1,\ t)=2,\quad t>0$$

$$u(x,\ 0)=x^2+1,\ \ 0\leq x\leq 1.$$

(25/100)

(d) Selesaikan:

$$u_t=u_{xx}+\cos\ t.\sin(3\pi x),\ \ 0<x<1,\ \ t>0$$

$$u(x,\ 0)=\sin(\pi x),\ \ 0\leq x\leq 1$$

$$u(0,\ t)=0,\ \ u(1,\ t)=0,\ \ t>0.$$

(25/100)

3. (a) Katakan $u(x,\ y)$ memenuhi persamaan $u_{xx}+u_{yy}=0$ di dalam suatu domain Ω dan selanjar di dalam $\overline{\Omega}$. Buktikan u mencapai maksimumnya pada sempadan bagi Ω.

(20/100)

(b) Cari fungsi Green bagi masalah:

$$u_{xx} + u_{yy} = h(x,y) \text{ di dalam } \Omega$$

$$u(x, y) = f(x, y) \text{ pada } \Gamma = \text{sempadan bagi } \Omega$$

untuk setiap kes berikut:

(i) $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty,\ y > 0\}$

(ii) $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

(20/100)

(c) Selesaikan:

$$u_t = k\, u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = ae^{-bx^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$|u(x, t)| \le M, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

di mana *a, b, k* ialah pemalar positif.

(30/100)

(d) Selesaikan:

$$u_{tt} = c^2 . u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$$

$$u_t(x, 0) = 2, \quad x > 0$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad t > 0$$

dengan syarat:

$$\lim_{x \to \infty} u(x, t) \text{ wujud bagi semua } t > 0.$$

(30/100)

Jadual 1 : Jelmaan Fourier	
$f(x)$	$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$
e^{-cx^2}	$\frac{1}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{\alpha^2}{4c}}$
$f^{(n)}(x)$	$(-i\alpha)^n.F(\alpha)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du$	$\sqrt{2\pi}.F(\alpha).G(\alpha)$

Jadual 2 : Jelmaan Laplace	
$f(t)$	$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n=1, 2, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f(t-b)\ H(t-b)$	$e^{-bs}.F(s)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$\int_0^t f(t-u)g(u)du$	$F(s).G(s)$

–