

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1999/2000

September 1999

MAT 363 – Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman dan SATU halaman lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $N(0, 1)$. Bagi $k < n$, takrifkan

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \quad \text{dan} \quad \bar{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n X_i.$$

Cari taburan setiap statistik berikut:

(i) $\frac{1}{2} (\bar{X}_k - \bar{X}_{n-k})$

(ii) $k\bar{X}_k^2 + X_n^2$

(iii) $\frac{\sqrt{k} X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^k X_i^2}}$

(iv) $\frac{k\bar{X}_k^2}{(n-k)\bar{X}_{n-k}^2}$

(30/100)

- (b) Biarkan $\{X_n\}$ menandai jujukan pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi taburan F_n dan fungsi ketumpatan f_n . Cari taburan penghad pembolehubah rawak X_n , sekiranya wujud, apabila

(i) $X_n \sim N\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$

(ii) $F_n(x) = \left[1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n\right] I_{(0,n)}(x)$

(iii) $f_n(x) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{x}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-3} I_{(0,n)}(x)$

(30/100)

...2/-

- (c) Biarkan $\bar{X}_n$ dan S_n^2 masing-masingnya menandai min sampel dan varians sampel bagi sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$. Adalah diketahui bahawa $S_n^2 \sim G\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right)$.

- (i) Tunjukkan bahawa $S_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$.
- (ii) Tunjukkan bahawa pembolehubah rawak

$$T = \sqrt{n} \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

mempunyai taburan penghad yang normal piawai, yakni taburan- t menumpu kepada taburan normal piawai apabila $n \rightarrow \infty$.

(40/100)

2. (a) Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel rawak daripada taburan binomial dengan kedua-dua parameternya, n dan p , tidak diketahui. Cari penganggar kaedah momen bagi n dan p .

(20/100)

- (b) Biarkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel rawak daripada taburan Bernoulli dengan parameter θ , $0 \leq \theta \leq 1$.

- (i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum θ .
- (ii) Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{n-1} \sum X_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}^2$$

ialah penganggar saksama $\theta(1 - \theta)$.

- (iii) Cari batas bawah Cramér-Rao bagi varians penganggar saksama $\theta(1 - \theta)$.

(30/100)

- (c) Cari statistik cukup dan lengkap bagi setiap taburan berikut:

(i) $f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(0, \infty)}(x); \theta > 1$.

(ii) $f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-x^2/2\theta} I_{(-\infty, \infty)}(x); \theta > 0$.

(iii) $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0, \infty)}(x); \theta > 0$.

(30/100)

...3/-

- (d) Pertimbangkan famili fungsi ketumpatan berikut:

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta, \infty)}(x); -\infty < \theta < \infty.$$

Bagi tujuan menganggar θ , sampel rawak saiz n diambil daripada taburan tersebut.

- (i) Cari statistik cukup bagi taburan ini.
- (ii) Jika $Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tunjukkan bahawa Y_1 ialah penganggar konsisten bagi θ dengan mencari had fungsi taburan G_1 bagi Y_1 apabila $n \rightarrow \infty$.

(20/100)

3. (a) Andaikan X_1, X_2 sampel rawak saiz 2 daripada taburan $N(\theta, 1)$ dan biarkan $Y_1 < Y_2$ menandai statistik tertib sepadan.

- (i) Jika (Y_1, Y_2) selang keyakinan bagi θ , cari pekali keyakinannya, γ .
[Petua: Cari fungsi ketumpatan tercantum Y_1 dan Y_2]
- (ii) Takrifkan $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$. Jika $(\bar{X} + a, \bar{X} + b)$ ialah selang keyakinan θ pada aras keyakinan γ yang sama seperti di dalam (i), cari nilai a dan b .
- (iii) Kirakan jangkaan panjang kedua-dua selang keyakinan bagi menentukan selang keyakinan yang lebih baik.

[Petua: $U = Y_2 - Y_1$ mempunyai fungsi ketumpatan

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2/4} I_{(0, \infty)}(u).]$$

(50/100)

- (b) Pertimbangkan sampel rawak saiz n daripada taburan $B(\theta, 1)$ dengan fungsi ketumpatan $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0, 1)}(x); \theta > 0$.

- (i) Jika $X \sim B(\theta, 1)$, tunjukkan bahawa pembolehubah rawak $Y = -\ln X$ mempunyai taburan $G(1, \theta)$.
- (ii) Takrifkan $Q = \sum_{i=1}^n Y_i$. Tunjukkan bahawa $2\theta Q$ ialah suatu kuantiti pangsaan dan seterusnya terbitkan selang keyakinan 95% bagi θ apabila $n = 30$.
- (iii) Terbitkan selang keyakinan *hampiran* 95% bagi θ apabila $n = 30$.

(50/100)

...4/-

4. (a) Berasaskan sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$, cari rantau genting terbaik bagi menguji

$$H_0 : \mu = 0, \sigma^2 = 1 \text{ lawan } H_1 : \mu = 1, \sigma^2 = 4.$$

(20/100)

- (b) Andaikan X suatu cerapan *tunggal* daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x; \theta) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{(0,1)}(x); \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

- (i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz $\alpha = 0.05$ bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta = 0$.

- (ii) Bagi menguji $H_0 : \theta \leq 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut digunakan:

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika dan hanya jika } X \geq \frac{1}{2}.$$

Cari fungsi kuasa dan saiz ujian tersebut.

(40/100)

- (c) Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel rawak saiz n daripada taburan Poisson yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x; \theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} I_{\{0,1,2,\dots\}}(x),$$

- (i) Cari ujian berkuasa bersaiz $\alpha = 0.05$ bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$. Biarkan $n = 25$ dan gunakan teorem had memusat.

- (ii) Satu ujian bagi menguji $H_0 : \theta = \theta_0$ lawan $H_1 : \theta \neq \theta_0$ diberikan seperti berikut:

$$\text{Tolak } H_0 \text{ jika dan hanya jika } |\bar{X} - \theta_0| \geq k.$$

Sekiranya $n = 100$ dan $\alpha = 0.5$, cari nilai k .

(40/100)

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varsians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\dots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}, qe^t < 1$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, t \neq 0$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + (\sigma t)^2 / 2\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$
Gama	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	